МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА ДЛЯ МЕНЕДЖЕРІВ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2015

УДК 510.6:519.1 (075)
ББК 22.174я73-6
К56

Автори:
Коваленко *Людмила Борисівна*, к.ф.-м.н., доц.
Станішевський *Степан Олександрович*, к.т.н., доц.

Рецензенти:

Стрельникова О. О., доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України;

Титаренко О. М., кандидат фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету радіоелектроніки;

Щелкунова Л. І., доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури

Рекомендовано до друку Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (лист № 1/11-11522 від 22.07.2014)

Коваленко Л. Б.

К56 Дискретна математика для менеджерів : навч. посібник / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 280 с.

ISBN 978-966-695-370-7

У навчальному посібнику викладені основні розділи дискретної математики. Крім необхідного теоретичного матеріалу наведена достатня кількість прикладів розв'язання задач і завдань для самостійної роботи. До всіх тем запропоновані тести для поточного контролю знань. Посібник узгоджений із структурою змісту навчальної дисципліни, рекомендованою Європейською Кредитно-Трансферною Системою (ECTS).

Рекомендований для студентів напряму підготовки «Менеджмент».

УДК 510.6:519.1 (075)
ББК 22.174я73-6

ISBN 978-966-695-370-7

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник «Дискретна математика для менеджерів» побудований за модульною технологією навчання згідно з робочими планами курсу «Дискретна математика». Основою даного навчального посібника є цикл лекцій з дискретної математики, що на протязі декількох останніх років читається викладачами кафедри вищої математики ХНУМГ ім. О. М. Бекетова на факультеті менеджменту.

Доступне, коректне подання теоретичного матеріалу супроводжується детальними ілюстраціями, великою кількістю прикладів для практичного закріплення вивченого.

Кожен розділ складається з основних визначень, властивостей, операцій і теорем; має значну кількість розв’язаних і ілюстрованих прикладів, містить вправи для аудиторної та самостійної роботи.

Для розуміння матеріалу, викладеного в навчальному посібнику, досить мати знання в обсязі курсу математики за середню школу.

Це дає можливість студентам різних спеціальностей і форм навчання вивчати дискретну математику самостійно для подальшого використання її у природничих науках, які інтенсивно розвиваються на базі розробок з використанням дискретної інформації (слова, конструкції мов і граматик; таблиці даних наукових спостережень; статистичні таблиці господарської діяльності, соціального і демографічного розвитку суспільства) і новітніх комп’ютерних технологій.

Посібник призначений для студентів-менеджерів інженерно-економічних навчальних закладів, а також може використовуватися для самоосвіти.

1. ТЕОРІЯ МНОЖИН

1.1. Поняття множини

<u>Визначення 1.1.</u> ***Множиною*** є сукупність визначених об'єктів, різних між собою, об’єднаних за певною ознакою чи властивістю.

<u>Визначення 1.2.</u> Якщо a один з об'єктів множини A, то говорять, що a - *елемент множини* A, або a *належить* A.

Домовимося позначати множини рядковими латинськими літерами A, B, C, …, а елементи множини – прописними латинськими літерами a, b, c,….

Способи завдання множин:

- ***перерахуванням,*** тобто списком всіх своїх елементів. Такий спосіб завдання прийнятний тільки при завданні кінцевих множин. Позначення списку – у фігурних дужках. Наприклад, множина, що є з перших п'яти простих чисел $A=\{2,3,5,7,11\}$. Множина спортсменів університетської хокейної команди: $B=\{Іванов, Петров, Сидоров, Бубликов, Сироєжкін, Волосюк\}$;

- ***процедурою***, що породжує і описує спосіб одержання елементів множини із уже отриманих елементів або з інших об'єктів. Наприклад, множина усіх цілих чисел, що є степенями двійки M_{2^n}, $n \in N$, де N - множина натуральних чисел, може бути представлена породжуючою процедурою, заданою двома правилами, названими рекурсивними: а) $1 \in M_{2^n}$; б) якщо $m \in M_{2^n}$, тоді $2m \in M_{2^n}$;

- ***описом характеристичних властивостей***, якими повинні володіти елементи множини. Так, множина A, що складається з таких елементів x, які мають властивість $P(x)$, позначимо в такий спосіб: $A = \{x|P(x)\}$.

Так, розглянута вище множина всіх цілих чисел, що є степенями числа 2 може бути записана як $A = \{x|x = 2^n, n \in N\}$. До A ще треба додати 1.

Якщо елемент a належить множині A, то пишуть $a \in A$. Якщо a не є елементом множини A, то пишуть $a \notin A$. Наприклад, $5 \in \{1,3,5,7\}$, але $4 \notin \{1,3,5,7\}$.

Якщо $A = \{x | \text{студентки групи МОМГ} - 2013\}$, то *Іванова* $\in A$, а *Петров* $\notin A$.

<u>Визначення 1.3.</u> Множина A називається ***підмножиною*** (або ***включенням***) множини $B (A \subseteq B)$, якщо кожний елемент множини A є елементом множини B, тобто, якщо $x \in A$, то $x \in B$.

Якщо $A \subseteq B$ і $A \neq B$, то A називається строгою підмножиною й позначається $A \subset B$.

<u>Визначення 1.4.</u> Дві множини рівні $(A = B)$, якщо всі їх елементи збігаються. Множини A і B рівні, якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$.

Множина, яка містить скінченну кількість елементів, називається *скінченною*, у протилежному випадку – *нескінченною*. Кількість елементів у скінченій множині A називається *потужністю* множини A і позначається $|A|$.

<u>Визначення 1.5.</u> Множина, що не містить елементів, називається *порожньою множиною*, і позначається $\varnothing$. Порожня множина є підмножиною будь-якої множини. *Універсальна множина* U є множина, що володіє такою властивістю, що всі розглянуті множини є його підмножинами.

Варто розрізняти поняття належності елементів множини і включення! Так, наприклад, якщо множина $A = \{1,3,6,13\}$, то $3 \in A$, $6 \in A$, але $\{3,6\} \notin A$, у той час як $\{3,6\} \subseteq A$.

<u>Приклад 1.1.</u> Які з наведених визначень множин A, B, C, D є коректними:

а) $A = \{1,3,5\}$ б) $B = \{4,7,7,11\}$,

в) $C = \{x | x \in A\}$, г) $D = \{A, B\}$?

Чи належить число 6 множині D?

Розв'язання:

а) визначення множини A перерахуванням елементів коректно.

б) відповідно до визначення множин, елементи її повинні бути різні, тому при перерахуванні елементів множини не слід указувати той самий елемент кілька разів. Коректне визначення множини B виглядає в такий спосіб: $B = \{4,7,11\}$.

в) визначення множини C описом характеристичної властивості коректно.

г) визначення списком множини D коректно: елементами множини D є множини A і B, $D = \{\{1,3,5\},\{4,7,11\}\}$. Однак $6 \notin D$, тому що даний елемент не перерахований у списку.

<u>Визначення 1.6.</u> Множина всіх підмножин, що складаються з елементів множини A, називається *булеаном* $P(A)$.

<u>Приклад 1.2.</u> Нехай $A = \{a, b, c, d\}$. Визначити булеан множини A. Яка потужність множини $P(A)$?

Розв'язання:

$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},$
$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$.

Потужність $|P(A)| = 16$.

Завдання

1. Задати різними способами множину натуральних чисел, кратних 3 і не перевищуючих 100.

2. Задати різними способами множину обласних центрів України.

3. Перелічите елементи множини $\{x | x \in N, x^3 < 100\}$.

4. Перелічите елементи множини $\{x|x - \text{додатне непарне число}, x < 35\}$.

5. Перелічите елементи множини $\{x|x - \text{список студентів вашої групи}\}$.

6. Опишіть множину $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$ за допомогою характеристичної властивості.

7. Опишіть множину $\{\text{березень}, \text{квітень}, \text{травень}\}$ за допомогою характеристичної властивості.

8. Опишіть множину $\{1, 5, 25, 125, 625, 3125\}$ за допомогою характеристичної властивості.

9. Перелічите підмножини множини $A = \{a, b\}$.

10. Перелічите підмножини множини $A = \{\text{грудень}, \text{січень}, \text{лютий}\}$.

11. Перелічите підмножини множини $A = \{3,5,17,28\}$.

12. Визначте булеан множини A. Яка потужність множини $P(A)$:

а) $A = \{4,7\}$ б) $A = \{1,8,14\}$;

в) $A = \{5,9,13,42\}$; г) $A = \{2,9,11,37,45\}$.

13. Використовуючи результати попередніх чотирьох прикладів, визначте потужність множини, що має k елементів.

14. Визначте істинність або хибність кожного з наступних висловлень:

а) $\varnothing \subseteq \varnothing$; б) $\varnothing \subset \varnothing$;

в) $\varnothing \subseteq A$; г) $\varnothing \in A$,

де A - довільна множина.

15. Визначте істинність або хибність кожного з наступних висловлень:

а) $5 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$; б) $\{5\} \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$;

в) $\{1, 3, 5\} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$; в) $\{1, 3, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

16. Визначте кількість елементів у кожній множині:

а) $\{\varnothing, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; б) $\{1, 2, 3, \{4, 5, 6, 7\}\}$;

в) $\{1, 2, 3, \{4, \{5, 6, 7\}\}\}$; г) $\{\{1, 2\}, \{\{3, 4\}, 5\}, 6, 7\}$.

1.2. Операції над множинами

<u>Визначення 1.7.</u> *Об'єднанням* множин A і B називається множина, що складається із всіх тих елементів, які належать хоча б однієї з множин A або B. Об'єднання множин A і B позначається $A \cup B$. Це визначення рівносильне наступному: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ } або \text{ } x \in B\}$.

<u>Приклад 1.3.</u> Нехай $A = \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$. Знайти $A \cup B$.

Розв'язання: $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$.

<u>Визначення 1.8.</u> *Перетинанням* множин A і B називається множина, що складається із всіх тих елементів, які належать і множині A, і множині B. Перетинання множин A і B позначається $A \cap B$. Це визначення рівносильне наступному: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ } і \text{ } x \in B\}$.

<u>Приклад 1.4.</u> Нехай $A = \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$. Знайти $A \cap B$.

Розв'язання: $A \cap B = \{2, 3, 7\}$.

<u>Визначення 1.9.</u> *Доповненням* (або *абсолютним доповненням)* множини A називається множина, що складається із всіх елементів універсальної множини, які не належать A. Доповнення множини A позначається $\overline{A}$. Це визначення рівносильне наступному: $\overline{A} = U - A = \{x | x \in U \text{ } и \text{ } x \notin A\}$.

Приклад 1.5. Нехай $A=\{1,3,8\}$, $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Знайти $\overline{A}$.

Розв'язання: $\overline{A}=\{2,4,5,6,7,9,10\}$.

Визначення 1.10. *Різницею* множин A й B (*або відносним доповненням)* називається множина, що складається із всіх елементів множини A, які не належать множині B. Різницю множин A і B позначають $A-B$. Це визначення рівносильне наступному: $A-B=\{x|x\in A \text{ и } x\notin B\}$.

Приклад 1.6. Нехай $A=\{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 7, 9\}$. Знайти $A-B$.

Розв'язання: $A-B=\{5, 6\}$.

Визначення 1.11. *Симетричною різницею* множин A і B називається множина, що складається з об'єднання всіх елементів, що належать множині A і не належать B, і елементів, що належать множині B і не належать A. Симетрична різниця множин A і B позначається $A+B$. Це визначення рівносильне наступному: $A+B=(A-B)\cup(B-A)$.

Приклад 1.7. Нехай $A=\{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 7, 9\}$. Знайти $A+B$.

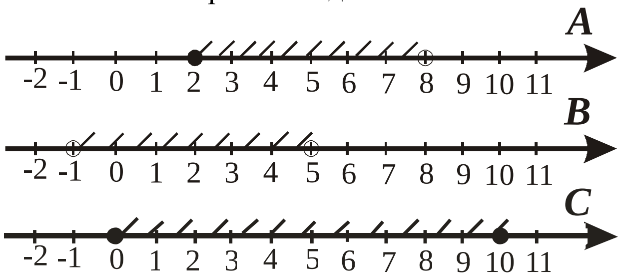
Розв'язання: $A+B=\{1, 5, 6, 9\}$.

Визначення 1.12. Операції, які виконують над однією множиною, називають *унарними*. Операції, які виконують над двома множинами, називають *бінарними*. Прикладом унарної операції є знаходження доповнення. Прикладами бінарних операцій є об'єднання, перетинання, різниця, симетрична різниця.

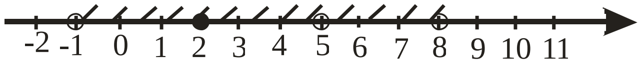
Розглянемо приклади, в яких множини задані не переліком, а інтервалами на числовій вісі.

Приклад 1.8. Нехай $A=[2,8)$, $B=(-1,5)$; $C=[0,10]$. Знайти $\overline{B}$, $A\cup B$, $B\cap C$, $C-A$, $B+C$.

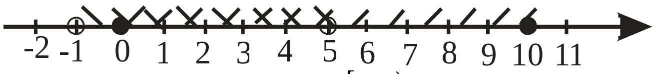
Розв'язання: Зобразимо задані множини на числовій вісі



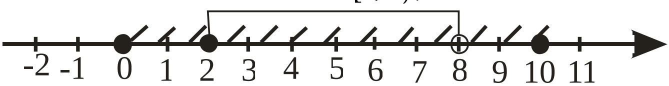
Тоді шукані множини будуть мати вигляд (рис. 1.1):



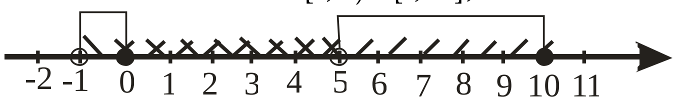
$A\cup B=(-1,8)$;



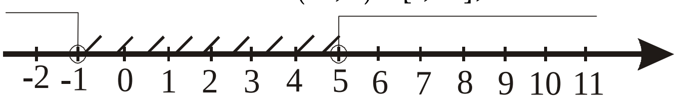
$B\cap C=[0,5)$;



$C-A=[0,2)\cup[8,10]$;



$B+C=(-1,0)\cup[5,10]$;



$\overline{B}=(-\infty,-1]\cup[5,\infty)$.

Рис. 1.1.

1.3. Діаграми Венна

Для графічної ілюстрації відносин між множинами даної універсальної множини U використовують діаграми Венна. Діаграма Венна – це зображення множини у вигляді геометричної множини, наприклад, кола. При цьому універсальну множину зображують у вигляді прямокутника. На рис. 1.2 зображені діаграми Венна для розглянутих операцій над множинами.

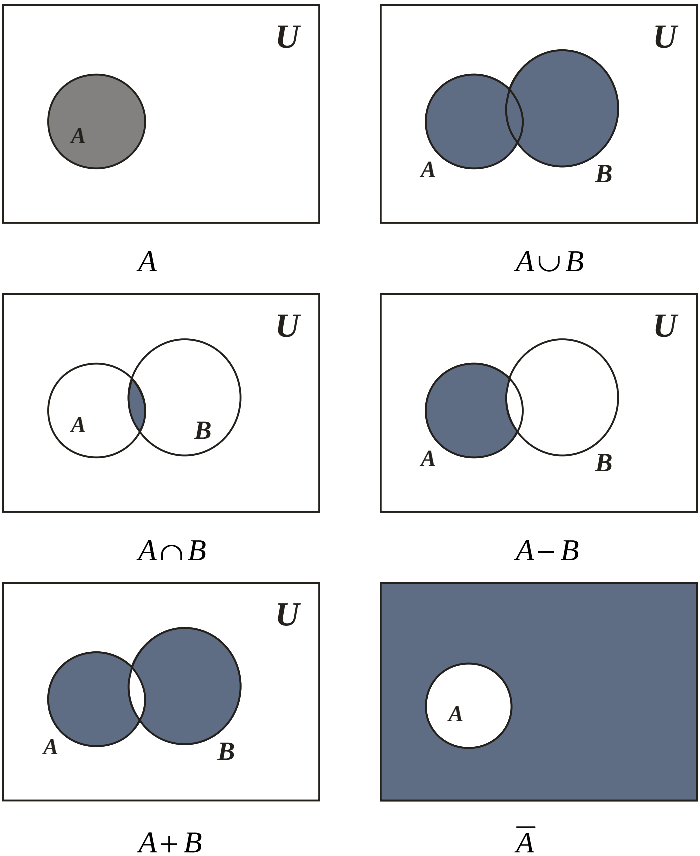


Рис. 1.2.

Теорема 1. Для будь-яких підмножин A, B, C універсальної множини U справедливо наступне:

а) закони ідемпотентності

$$A \cup A = A;$$
$$A \cap A = A;$$

б) подвійне доповнення

$$\overline{\left(\overline{A}\right)} = A;$$

в) закони де Моргана

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B};$$
$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B};$$

г) властивості комутативності

$$A \cup B = B \cup A;$$
$$A \cap B = B \cap A;$$

д) властивості асоціативності

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

е) властивості дистрибутивності

$$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C);$$

ж) властивості тотожності

$$A \cup \varnothing = A;$$
$$A \cap U = A;$$

з) властивості доповнення

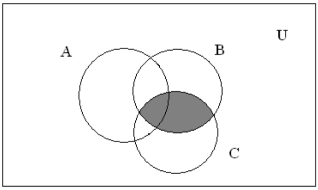
$$A \cup \overline{A} = U;$$
$$A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

Пріоритет операцій:

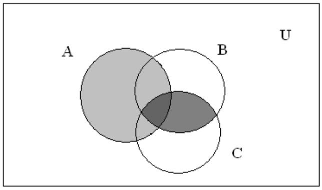
1. $\overline{A}$; **2**. $A \cap B$; **3**. $A \cup B$; **4**. $A - B$; **5**. $A + B$.

Приклад 1.8. Довести, що $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

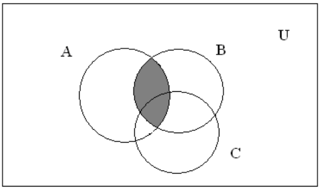
Рішення. Доведемо цю властивість асоціативності, скориставшись діаграмами Венна (рис. 1.3):



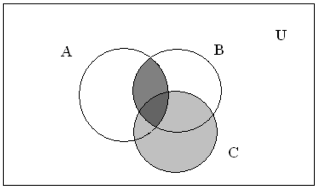
$B \cap C$



$A \cap (B \cap C)$



$A \cap B$



$(A \cap B) \cap C$

Рис. 1.3.

Як бачимо з рис. 1.3 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, що й треба було довести.

Завдання

17. Дано $A = \{0, 3, 5, \{6, 9\}\}$, $B = \{2, 3, 9\}$, $C = \{0, 2, 3, 6\}$. Визначите наступні множини: $B - C$, $A \cap B$, $A + C$, $(A \cup B) - C$.
18. Дано $A = \{1, 4, 8\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{0, \{3, 4\}, \{5, 6\}, 8\}$. Визначите наступні множини: $A - B$, $A \cup C$, $A + B$, $(A \cap B) \cup (B - C)$.
19. Дано $A = \{2, 3, \{8, 9\}\}$, $B = \{0, \{1, 2\}, 3, 5\}$, $C = \{2, 5, 8\}$. Визначите наступні множини: $A \cup B$, $C - B$, $A + C$, $B + (A \cap C)$.
20. Дано $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Визначите наступні множини:

$A \cap B$, $B \cup C$, $A - C$, $A + B$, $\overline{C}$, $A \cup (B \cap C)$, $(A \cup B) \cap C$, $\overline{(A \cap B)}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$.

21. Дано $A = \{1, 2, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Визначите наступні множини: $A \cap C$, $A \cup B$, $B - C$, $A + C$, $\overline{B}$,. $(A - \varnothing) \cup (A - A)$, $\overline{A} \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) - \overline{C}$.
22. Дано $A = [0, 6)$, $B = [1, 7)$, $C = [2, 8]$. Визначите наступні множини: $C - B$, $A + C$, $\overline{B} \cap \overline{C}$.
23. Дано $A = (3, 7)$, $B = (1{,}5]$, $C = [4, 8]$. Визначите наступні множини: $A - B$, $B + C$, $\overline{A \cup B}$.
24. Дано $A = (5, 8)$, $B = [2, 6)$, $C = (4, 7]$. Визначите наступні множини: $\overline{A \cap C}$, $A - B$, $B \cup C$.
25. Визначите, які з наступних тверджень істинні, а які хибні:
    а) $A \cap \varnothing = A$;
    б) $A \cup \varnothing = A$;
    в) $A - A = \varnothing$;
    г) $A + A = \varnothing$;
    д) якщо $A \subseteq B$, то $A \cap B = A$;
    е) якщо $A \cap B = A$, то $B \subseteq A$;
    ж) якщо $A \subseteq B$, то $A \cup B = A$;
    з) якщо $A \cup B = A$, то $B \subseteq A$;

26. Для кожної з наведених нижче множин використайте діаграми Венна і заштрихуйте ті її частини, які зображують задані множини:
    а) $\overline{(A \cap B)}$;
    б) $\overline{(A \cup B)}$;
    в) $B - \overline{A}$;
    г) $(A \cup B) - (A \cap B)$;
    д) $B - (A \cap B)$;
    е) $\overline{(A \cap B \cap C)}$;
    ж) $A - (B \cap C)$;
    з) $(A \cap B) + C$;
    и) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$;
    к) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
27. Опишіть множини, що відповідають зафарбованої частині кожної діаграми Венна (рис. 1.4):

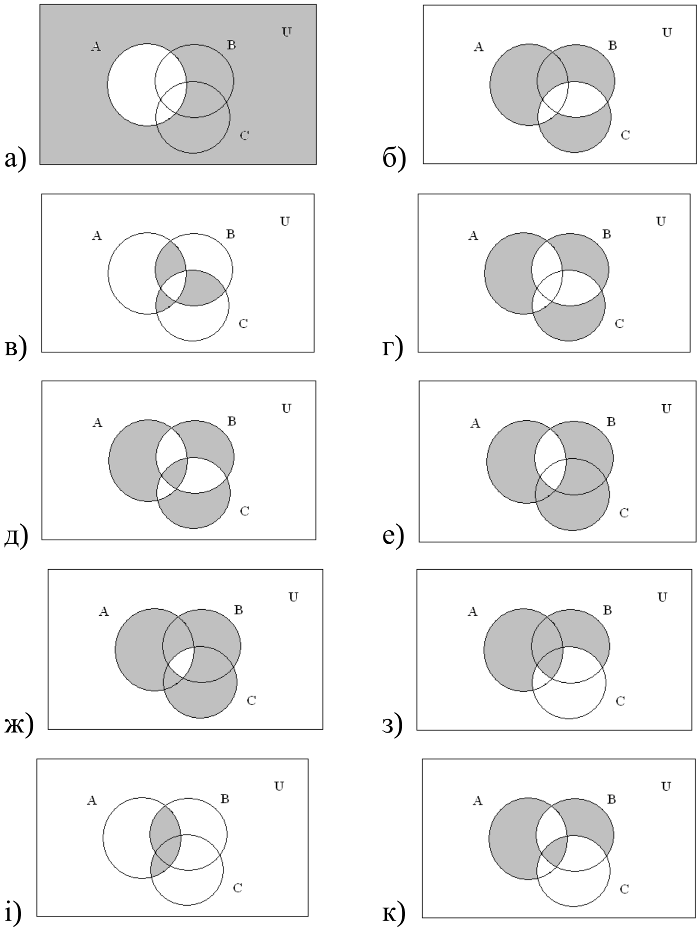


Рис. 1.4.

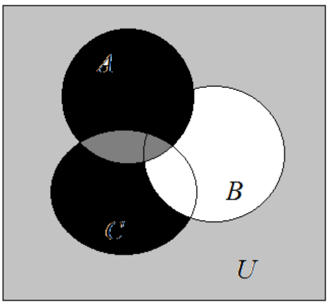
Тестове завдання до теми «Теорія множин»

1. Дано множину $A=\{x \mid x\in N,\ x^2<20\}$. Задайте елементи множини списком.
   А: $\{0; 1; 4; 9; 16\}$
   Б: $\{1; 2; 3; 4\}$
   В: $\{1; 4; 9; 16\}$
   Г: $\{0; 1; 2; 3; 4\}$

2. Знайти потужність та потужність булеану множини A із завдання 1.
   А: 5; 10. **Б:** 5; 32. **В:** 4, 16. **Г:** 4, 8.

3. Дано множини $A=\{1; 3; \{5,7\}\}$, $B=\{2; 4; 5; 6; 7; 8\}$, $C=\{0; 1; 3; 8\}$. Знайти $B-(A\cup C)$.
   А: $\{2,4,5,6,7\}$. **Б:** $\{0,2,4,5,6,7\}$.
   В: $\{2,4,6,\{5,7\}\}$. **Г:** $\{1,2,4,5,6,8\}$.

4. Опишіть множину, якій відповідає зафарбована частина діаграми Вена:



   А: $A-(B\cup\bar{C})$. **Б:** $(\bar{A}+B)\cap C$.
   В:. $A-(\bar{B}\cup C)$. **Г:** $A+(\bar{B}\cap C)$.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення множини.
2. Які способи завдання множин ви знаєте? Наведіть приклади завдання множини різними способами.
3. Що таке булеан множини?
4. Як обчислюються потужність множини та потужність булана?
5. Поясніть різницю між поняттями належністю до множини та включенням.
6. Дайте визначення операцій над множинами.
7. Для чого використовуються діаграми Вена? Проілюструйте прикладами.
8. Доведіть основні властивості множин за допомогою діаграм Вена.

2. ВІДНОШЕННЯ

2.1. Основні визначення

<u>Визначення 2.1.</u> *Упорядкована пара предметів* – це сукупність, що складається із двох предметів, розташованих у деякому певному порядку. При цьому впорядкована пара має наступні властивості:

а) для будь-яких двох предметів x і y існує об'єкт, який можна позначити як $\langle x, y \rangle$, названий упорядкованою парою;

б) якщо $\langle x, y \rangle$ і $\langle u, v \rangle$ - упорядковані пари, то $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ тоді і тільки тоді, коли $x = u$, $y = v$.

При цьому x будемо називати першою координатою, а y - другою координатою впорядкованої пари $\langle x, y \rangle$.

<u>Визначення 2.2.</u> *Бінарним* (або *двомісним*) відношенням R називається підмножина впорядкованих пар, тобто множина, кожен елемент якого є впорядкована пара.

Якщо R є деяке відношення, це записують як $\langle x, y \rangle \in R$ або xRy.

Один з типів відношень − це множина всіх таких пар $\langle x, y \rangle$, що x є елемент деякої фіксованої множини X, а y − елемент деякої фіксованої множини Y. Таке відношення називається *прямим* або *декартовим добутком*.

<u>Визначення 2.3.</u> *Декартів добуток* $X \times Y$ множин X і Y є *множина* $\{\langle x, y \rangle | x \in X, y \in Y\}$.

При цьому множина X називається *областю визначення* відношення R, а Y - його *областю значень*: $D(R) = \{x | \langle x, y \rangle \in R\}$; $E(R) = \{y | \langle x, y \rangle \in R\}$ (див. рис. 2.1).

Приклад 2.1. Знайти області визначення і значень відношення $A=\{\langle a,1\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,2\rangle,\langle c,5\rangle,\langle e,7\rangle\}$.

Розв'язання: Область визначення даного відношення $D(A)=\{a,c,e\}$, а область значень - $E(A)=\{1,2,5,7\}$.

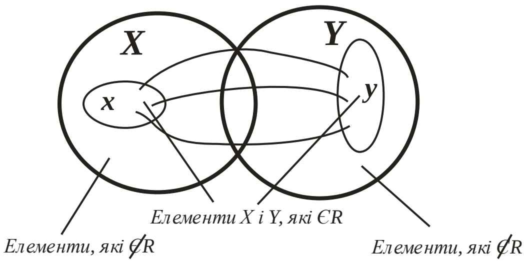


Рис. 2.1.

Скориставшись визначенням декартового добутку, можемо дати ще одне визначення бінарного відношення:

Визначення 2.4. *Бінарним* відношенням R називається підмножина пар $\langle x,y\rangle\in R$ прямого добутку $X\times Y$, тобто $R\subseteq X\times Y$.

Надалі ми будемо розглядати бінарні відношення, тому замість терміна «бінарне відношення» будемо вживати термін «відношення».

Розглянемо кілька прикладів відношень:

1. Якщо R − множина дійсних чисел, тобто $\left\{\langle x,y\rangle\in R\left|\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\right.\right\}$ - бінарне відношення на R. Графічно його зобразити можна в такий спосіб (рис. 2.2):

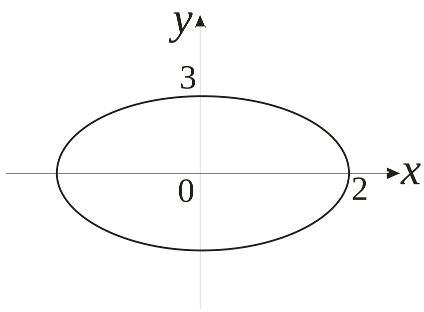


Рис. 2.2.

2. Якщо N − множина натуральних чисел, то відношення $\{\langle x, y\rangle \in N \times N | x \geq y\}$ виконується для пар $\langle 5{,}3\rangle$, $\langle 7{,}1\rangle$, $\langle 2{,}2\rangle$, але не виконується для пар $\langle 1{,}7\rangle$, $\langle 9{,}11\rangle$, $\langle 2{,}5\rangle$.

3. Якщо X − множина студентів Академії, а Y − множина груп Академії, то відношення множин X і Y − є множина $\{\langle x, y\rangle \in X \times Y | x -$ студент групи $y\}$.

4. Якщо X − множина товарів у магазині, а $Y = R^{+}$ − множина дійсних додатних чисел, то відношення множин X й Y − є множина $\{\langle x, y\rangle \in X \times Y | y - ціна \ \ x\}$.

У силу визначення бінарних відношень, як *спосіб їх завдання* можуть бути використані будь-які способи завдання множин. Відносини, визначені на кінцевих множинах, звичайно задаються:

1. *Списком (перерахуванням)* упорядкованих пар, для яких це відношення виконується.

2. *Матрицею* – бінарному відношенню $R \subseteq X \times X$, де $B \times A$ відповідає квадратна матриця порядку n, кожен елемент a_{ij} якої дорівнює 1, якщо між x_i й x_j є відношення R, і 0, у протилежному випадку, тобто:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i R x_j, \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Приклад 2.2. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. Знайти декартовий добуток множин $A \times B$ й $B \times A$. Записати $(A \times B) - (B \times A)$, $(A \times B) \cap (B \times A)$, $(A \times B) + (B \times A)$.

Розв'язання:

$A \times B = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle\}$;

$B \times A = \{\langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 4,3 \rangle\}$

$(A \times B) - (B \times A) = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,4 \rangle\}$;

$(A \times B) \cap (B \times A) = \{\langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$;

$(A \times B) + (B \times A) = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 4,1 \rangle,$
$\langle 4,2 \rangle, \langle 4,3 \rangle\}$.

Приклад 2.3. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Задати в явному виді (списком) і матрицею відношення $R \subseteq A \times A$, якщо відношення R означає "бути строго більше".

Розв'язання: Відношення R містить всі впорядковані пари елементів $\langle x, y \rangle$ з A:

$$R = \{\langle x, y \rangle \in A \times A | x > y\}.$$

Список відношення R виглядає в такий спосіб:

$R = \{\langle 2,1 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 4,3 \rangle, \langle 5,1 \rangle, \langle 5,2 \rangle, \langle 5,3 \rangle, \langle 5,4 \rangle, \langle 6,1 \rangle, \langle 6,2 \rangle,$
$\langle 6,3 \rangle, \langle 6,4 \rangle, \langle 6,5 \rangle, \langle 7,1 \rangle, \langle 7,2 \rangle, \langle 7,3 \rangle, \langle 7,4 \rangle, \langle 7,5 \rangle, \langle 7,6 \rangle, \langle 8,1 \rangle, \langle 8,2 \rangle,$
$\langle 8,3 \rangle, \langle 8,4 \rangle, \langle 8,5 \rangle, \langle 8,6 \rangle, \langle 8,7 \rangle, \langle 9,1 \rangle, \langle 9,2 \rangle, \langle 9,3 \rangle, \langle 9,4 \rangle, \langle 9,5 \rangle, \langle 9,6 \rangle,$
$\langle 9,7 \rangle, \langle 9,8 \rangle, \langle 10,1 \rangle, \langle 10,2 \rangle, \langle 10,3 \rangle, \langle 10,4 \rangle, \langle 10,5 \rangle, \langle 10,6 \rangle, \langle 10,7 \rangle, \langle 10,8 \rangle,$
$\langle 10,8 \rangle, \langle 10,9 \rangle\}$.

Матриця відношення R наведена на рис. 2.3:

R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
5	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
6	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
8	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
9	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Рис.2.3

Приклад 2.4. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Задати в явному виді (списком) і матрицею відношення $R \subseteq A \times A$, якщо відношення R означає:

а) «мають загальний дільник, відмінний від одиниці»;

б) «їх сума - число, кратне 3».

Розв'язання:

а) відношення R_1 може бути записане наступним чином:

$R_1 = \{\langle x, y \rangle \in A | x \;\; i \;\; y$ мають загальний дільник, відмінний від одиниці$\}$.

Список відношення R_1:

$$R_1 = \{\langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 2,10\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 3,9\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,6\rangle, \langle 4,8\rangle, \langle 4,10\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,10\rangle, \langle 6,2\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,4\rangle, \langle 6,6\rangle, \langle 6,8\rangle, \langle 6,10\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 8,2\rangle, \langle 8,4\rangle, \langle 8,6\rangle, \langle 8,8\rangle, \langle 8,10\rangle, \langle 9,3\rangle, \langle 9,6\rangle, \langle 9,9\rangle, \langle 10,2\rangle, \langle 10,4\rangle, \langle 10,5\rangle, \langle 10,6\rangle, \langle 10,8\rangle, \langle 10,10\rangle\}.$$

Матриця відношення R_1 наведена на рис. 2.4а;

R_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
6	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
9	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
10	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1

Рис. 2.4,а.

б) відношення R_2 може бути записане в такий спосіб $R_2 = \{\langle x,y\rangle \in A | x+y \text{ кратне } 3\}$. Список відношення R_2:

$$R_2 = \{\langle 1,2\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,8\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,7\rangle,\langle 2,10\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 3,9\rangle,\langle 4,2\rangle, \langle 4,5\rangle,\langle 4,8\rangle,\langle 5,1\rangle,\langle 5,4\rangle,\langle 5,7\rangle,\langle 5,10\rangle,\langle 6,3\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 6,9\rangle,\langle 7,2\rangle,\langle 7,5\rangle, \langle 7,8\rangle,\langle 8,1\rangle,\langle 8,4\rangle,\langle 8,7\rangle,\langle 8,10\rangle,\langle 9,3\rangle,\langle 9,6\rangle,\langle 9,9\rangle,\langle 10,2\rangle,\langle 10,5\rangle, \langle 10,8\rangle\}.$$

Матриця відношення R_2 наведена на рис. 2.4б.

R_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
2	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
4	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
5	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
6	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
7	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
8	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
9	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
10	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0

Рис. 2.4,б.

Приклад 2.5. Для зазначених нижче відношень привести приклади пар, для яких виконуються відношення, і пар, для яких відношення не виконуються:

1. Відношення, задані на множині точок дійсної площини:
   а) R_1 - «знаходитися на однаковій відстані від початку координат»;
   б) R_2 - «знаходитися на різній відстані від початку координат»;
   в) R_3 - «знаходитися на одному і тому ж колі з центром у початку координат»;
   г) R_4 - «бути симетричним відносно осі Oy».
2. Відношення, задані на множині елементів структури (рис. 2.5):
   а) R_5 - «бути частиною структури»;
   б) R_6 - «бути безпосередньо пов'язаним з…»;
   в) R_7 - «бути безпосереднім керівником»;
   г) R_8 - «бути керівником».

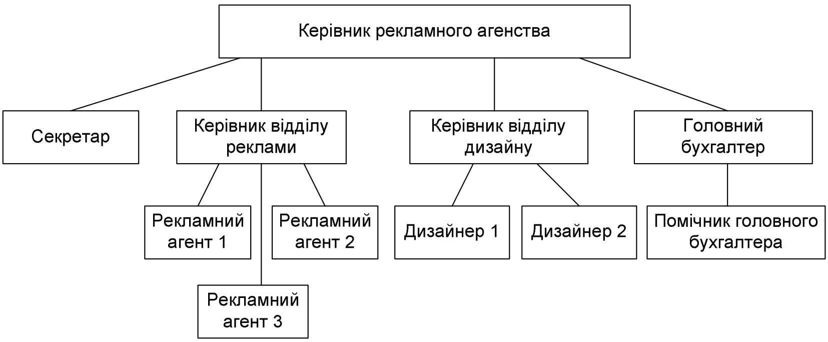


Рис. 2.5.

Розв'язання:

1. За визначенням кола, відношення R_1 і R_3 виконуються для тих самих пар точок.

Відношення R_2 виконується тільки для тих пар точок, для яких не виконуються відношення R_1 і R_3.

Відношення R_4 виконується для всіх пар точок $\langle x_1, y_1 \rangle$ і $\langle x_2, y_2 \rangle$, які задовольняють умовам $x_1 = -x_2$, $y_1 = y_2$.

2. Рис. 2.5 відображає зв'язок між елементами, що задають відношення. Структура, що задає відношення R_5 свідчить про те, що рекламне агентство – складна структура, на чолі якої – «керівник рекламного агентства», у підпорядкуванні якого «секретар», «керівник відділу реклами», «керівник відділу дизайну», «головний бухгалтер». У деяких з перерахованих елементів структури у свою чергу є підлеглі, а саме: у «керівника відділу реклами» - «рекламний агент 1», «рекламний агент 2», «рекламний агент 3»; у «керівника відділу дизайну» - «дизайнер 1», «дизайнер 2»; у «головного бухгалтера» - «помічник головного бухгалтера».

Відношення R_6 виконується тільки для тих пар елементів, які безпосередньо пов'язані між собою лінією.

Структура, що задає відношення R_7 й R_8 керівника всієї структури, якому безпосередньо підлеглі чотири елементи, три з яких має своїх безпосередніх підлеглих.

Все вищесказане проілюстровано за допомогою таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Відношення	Приклади пар, для яких відношення	
	виконується	не виконується
R_1	$\langle (3,4),(-5,0) \rangle$; $\langle (2,6),(\sqrt{10},\sqrt{30}) \rangle$	$\langle (-3,5),(7,4) \rangle$, $\langle (2,1),(-3,-5) \rangle$
R_2	$\langle (7,0),(0,-4) \rangle$, $\langle (5,-6),(-9,2) \rangle$	$\langle (0,3),(-3,0) \rangle$, $\langle (2\sqrt{5},4),(0,6) \rangle$
R_3	$\langle (12,5),(0,13) \rangle$, $\langle (\sqrt{5},2\sqrt{5}),(-5,0) \rangle$	$\langle (3,2),(-5,1) \rangle$, $\langle (9,3),(-6,-7) \rangle$
R_4	$\langle (2,5),(-2,5) \rangle$, $\langle (-7,3),(7,3) \rangle$	$\langle (4,5),(4,-5) \rangle$, $\langle (6,1),(9,-2) \rangle$
R_5	⟨секретар, керівник аг.⟩; ⟨дизайнер 1, керівник аг.⟩; ⟨рекл. аг. 1, кер. відділу рекл.⟩	⟨кер. аг., рекл. агент2⟩, ⟨пом. гол. бух., секретар⟩ ⟨дизайнер1, дизайнер2⟩
R_6	⟨секретар, керівник аг.⟩, ⟨керівник аг., секретар⟩, ⟨гол. бухг., пом. гол. бухг.⟩	⟨рекл. аг. 2, рекл. аг. 3⟩, ⟨секретар, дизайнер1⟩, ⟨дизайнер2, керівн. аг.⟩
R_7	⟨кер. аг., кер. від. дизайну⟩, ⟨гол. бухг., пом. гол. бухг.⟩ ⟨кер. від. рекл., рекл. аг. 1⟩	⟨пом. гол. бух., секретар⟩ ⟨кер. від. диз., кер. аг⟩, ⟨дизайнер2, кер. аг.⟩
R_8	⟨кер. аг., рекл. агент2⟩, ⟨кер. від. рекл., рекл. аг. 1⟩, ⟨гол. бухг., пом. гол. бухг.⟩	⟨рекл. аг1, кер. від. рекл.⟩ ⟨секретар, дизайнер1⟩, ⟨дизайнер 2, кер. аг.⟩

<u>Приклад 2.6.</u> Скласти матриці відношень, заданих на системі множин «булеан множини A» - $P(A)$, де $A=\{x,y,z\}$:

1) R_1 - «перетинатися з…» (мати непорожнє перетинання);

2) R_2 - «бути нестрогим включенням $\subseteq$».

Розв'язання: $P(A)=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\},\{x,y,z\}\}$.

Матриці відношень R_1, R_2 представлені на рис. 2.6.

R_1	$\varnothing$	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{z\}$	$\{x,y\}$	$\{x,z\}$	$\{y,z\}$	$\{x,y,z\}$
$\varnothing$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\{x\}$	0	1	0	0	1	1	0	1
$\{y\}$	0	0	1	0	1	0	1	1
$\{z\}$	0	0	0	1	0	1	1	1
$\{x,y\}$	0	1	1	0	1	1	1	1
$\{x,z\}$	0	1	0	1	1	1	1	1
$\{y,z\}$	0	0	1	1	1	1	1	1
$\{x,y,z\}$	0	1	1	1	1	1	1	1

R_2	$\varnothing$	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{z\}$	$\{x,y\}$	$\{x,z\}$	$\{y,z\}$	$\{x,y,z\}$
$\varnothing$	0	1	1	1	1	1	1	1
$\{x\}$	0	1	0	0	1	1	0	1
$\{y\}$	0	0	1	0	1	0	1	1
$\{z\}$	0	0	0	1	0	1	1	1
$\{x,y\}$	0	0	0	0	1	0	0	1
$\{x,z\}$	0	0	0	0	0	1	0	1
$\{y,z\}$	0	0	0	0	0	0	1	1
$\{x,y,z\}$	0	0	0	0	0	0	0	1

Рис. 2.6.

<u>Приклад 2.7.</u> Нехай відношення R - «є мама», визначено на множині $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ і представлено схемою (рис. 2.7). Задати списком відношення R. Визначити родинні відносини між парами $\langle a,c\rangle$, $\langle a,g\rangle$, $\langle e,f\rangle$, $\langle a,h\rangle$, $\langle b,g\rangle$.

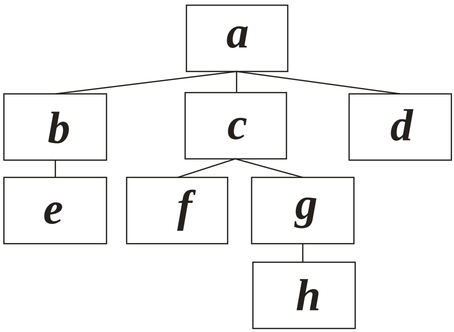


Рис. 2.7.

Розв'язання:

1) відношення $R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,e\rangle, \langle c,f\rangle,\langle c,g\rangle,$ $\langle g,h\rangle\}$.

2) a - мама для c; a - бабуся для g; e - двоюрідна сестра для f; a - прабабка для h, b - тітка для g.

Завдання:

1. Знайти області визначення і значень відношень:
   а) $\{\langle 5,x\rangle,\langle 3,y\rangle,\langle 3,z\rangle,\langle 5,z\rangle,\langle 6,x\rangle,\langle 6,y\rangle,\langle 10,z\rangle\}$;
   б) $\{\langle a,2\rangle,\langle a,7\rangle,\langle a,9\rangle,\langle b,3\rangle,\langle b,7\rangle,\langle c,2\rangle,\langle c,3\rangle,\langle c,9\rangle,\langle c,10\rangle\}$;
   в) $\{\langle 2,2\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,11\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 4,11\rangle,\langle 7,2\rangle\}$;
   г) $\{\langle 1,6\rangle,\langle 1,7\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 9,1\rangle,\langle 9,7\rangle,\langle 9,9\rangle\}$.

2. Знайти області визначення і значень відношень. Накреслити їх графіки:

а) $\left\{\langle x,y\rangle \middle| x,y\in R;\quad x^2+(y+3)^2\le 4,\ y\ge -2\right\}$;

б) $\left\{\langle x,y\rangle \middle| x,y\in R;\quad (x-2)^2+(y+3)^2\le 9\right\}$;

в) $\left\{\langle x,y\rangle \middle| x,y\in R;\quad \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 1,\quad x\ge -2,\ \ y\le 1\right\}$;

г) $\left\{\langle x,y\rangle \middle| x,y\in R;\quad |x|\le 3,\ \ |y|\le 2\right\}$;

д) $\left\{\langle x,y\rangle \middle| x,y\in R;\quad y\ge 2x+1,\ \ x\ge -2,\ \ y\le 1\right\}$;

е) $\left\{\langle x,y\rangle \middle| x,y\in R;\quad y\ge 2x,\ \ x\le 10,\ \ y\ge 0\right\}$.

3. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4,5\}$, $C=\{-1,0,2\}$. Знайти декартовий добуток $(A+B)\times(C-B)$ і накреслити його в декартовій системі координат.

4. $A=\{2,3,5\}$, $B=\{1,4\}$, $C=\{2,7\}$. Записати множину $(A\times B)+(C\times B)$.

5. $A=\{1,2,3,5,7\}$, $B=\{1,2,4\}$, $C=\{2,9,10\}$. Записати множину $(A-B)\times(C+B)$.

6. $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{0,1,2,3\}$, $C=\{1,2,3,4,5,6\}$. Записати множину $((A+B)-C)\times C$.

7. Чи вірно твердження: якщо $A-C=\varnothing$, то $(A\times B)-(C\times B)=\varnothing$?

8. Чи вірно твердження: якщо $A\ne C$ і $B\ne\varnothing$,то $A\times B\ne C\times B$?

9. Чи вірно твердження: якщо $A\subset C$, то $A\times B\subset C\times B$?

10. Чи вірно твердження: якщо $A\times C=B\times C$ і $C\ne\varnothing$,то $A=B$?

11. Чи вірно, що $(A\cap C)\times B=(A\times B)\cap(C\times B)$?

12. $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Задати в явному виді (списком) і матрицею відношення $R\subseteq A\times A$, якщо відношення R означає «*їх сума – просте число*».

13. $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Задати в явному виді (списком) і матрицею відношення $R\subseteq A\times A$, якщо відношення R означає «*їх сума – складне число*».

14. Відношення R визначене на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Задати списком і матрицею відношення $R=\{\langle a,b\rangle \mid a,b\in A,\ (a+b)\text{ - парне}\}$.

15. Відношення R визначене на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Задати списком і матрицею відношення $R=\{\langle a,b\rangle \mid a,b\in A,\ b\text{ - \textit{дільник} } (a+b),\ b\neq 1\}$.

16. Відношення R визначене на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Задати списком і матрицею відношення $R=\{\langle a,b\rangle \mid a,b\in A,\ (a+2)\text{ - дільник } (a+b)\}$.

17. Для визначених нижче відношень привести приклади пар, для яких виконуються відношення і, навпаки, не виконуються:

    а) відношення на множині точок дійсної площини:

    R_1 - «*знаходитися на колі* $x^2+y^2=16$»;

    R_2 - «*знаходитися усередині кола* $x^2+y^2=16$»;

    R_3 - «*знаходитися зовні кола* $x^2+y^2=16$»;

    R_4 - «*бути точкою перетину ліній* $x^2+y^2=1$ *й* $y=x^3$»;

    R_5 - «*знаходитися на прямій* $2x+5y=10$».

    б) відношення на множині студентів вашої групи:

    R_6 - «*сидіти за однією партою*»;

    R_7 - «*знаходитися за…у списку студентів академгрупи*»;

    R_8 - «*мати однаковий середній бал за результатами сесії*».

в) відношення, задані на множині елементів структури на рис. 2.8:

R_9 - «*бути безпосередньо зв'язаним з...*»;

R_{10} -«*бути керівником*»;

R_{11} - «*бути безпосереднім керівником*».

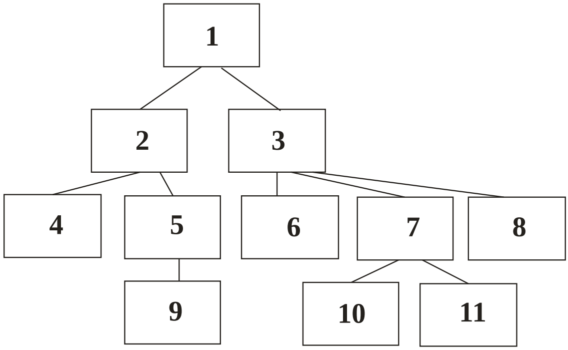


Рис. 2.8.

г) відношення, задані на множині членів вашої родини:

R_{12} - «*бути старше*»;

R_{13} - «*бути сином (дочкою)*»;

R_{14} - «*мати спільну кімнату*».

д) відношення, задані на множині міст України:

R_{15} - «*знаходитися в одній області*»;

R_{16} - «*знаходитися в сусідніх областях*»;

R_{17} - «*знаходитися по одну сторону ріки Дніпро*».

2.2. Властивості бінарних відношень

Визначення 2.5. Відношення R на $A \times A$ називається *рефлексивним*, якщо має місце $\langle a,a \rangle \in R$ для кожного $a \in A$. Головна діагональ матриці такого відношення містить тільки одиниці.

Наприклад, відношення *«жити в одній країні»* - рефлексивно. Відношення *«бути канцелярською приладдю»* рефлексивно для всього вмісту пенала. Відношення "≤" на множині дійсних чисел рефлексивно.

<u>Визначення 2.6.</u> Відношення R на $A \times A$ називається *антирефлексивним*, якщо ні для якого $a \in A$ не виконується $\langle a, a \rangle \in R$, тобто із $\langle a, b \rangle \in R$ треба $a \neq b$. Головна діагональ матриці такого відношення містить тільки нулі.

Наприклад, відношення *«бути дочкою», «бути молодше»* антирефлексивні. Відношення « < »на множині дійсних чисел антирефлексивно.

<u>Визначення 2.7.</u> Відношення R на $A \times A$ називається *симетричним*, якщо для всіх $a, b \in R$ з умови $\langle a, b \rangle \in R$ треба, що $\langle b, a \rangle \in R$. Матриця симетричного відношення симетрична щодо головної діагоналі, тобто $c_{ij} = c_{ji}$ для всіх i і j.

Наприклад, відношення *«робити в одній компанії», «вчитися в одному класі»* - симетричні. Відношення « = » на множині дійсних чисел симетрично.

<u>Визначення 2.8.</u> Відношення R на $A \times A$ називається *антисиметричним*, якщо для всіх $a, b \in R$, з умов $\langle a, b \rangle \in R$ і $\langle b, a \rangle \in R$ треба, щоб $a = b$, тобто ні для яких елементів a і b, що розрізняються $(a \neq b)$, не виконуються одночасно відношення $\langle a, b \rangle \in R$ і $\langle b, a \rangle \in R$. У матриці антисиметричного відношення відсутні одиниці, симетричні щодо головної діагоналі.

Наприклад, відношення *«бути дочкою», «бути керівником»* - антисиметричні. Відношення «≤» на множині дійсних чисел антисиметричне. Дійсно, якщо $a \leq b$ й $b \leq a$, то $a = b$.

Визначення 2.9. Відношення R на $A \times A$ називається *транзитивним*, якщо для будь-яких a, b, c з умов $\langle a, b \rangle \in R$ і $\langle b, c \rangle \in R$ прямує $\langle a, c \rangle \in R$. У матриці такого відношення повинна виконуватися наступна умова: якщо в i-тому рядку і в j-тому стовпці стоїть одиниця, тобто $c_{ij} = 1$, то всім одиницям в j-тому рядку і k-тому стовпці $(c_{jk} = 1)$ повинні відповідати одиниці в i-тому рядку і у тих же k-тих стовпцях, тобто $c_{ik} = 1$ (і, може бути, в інших стовпцях).

Наприклад, відношення *«жити в одному місті»*, *«бути сестрою»*, - транзитивні. Відносини «≤»,«=» на множині дійсних чисел транзитивні.

Визначення 2.10. Бінарне відношення називається *еквівалентним*, якщо воно рефлексивно, симетрично і транзитивне.

Наприклад, відношення *«жити в одному місті»* - еквівалентне на множині: «велика кількість людей».

Приклад 2.8. Нехай $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ і відношення $R_1 \subseteq A \times A$ є множина $R_1 = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 5,5 \rangle, \langle 6,6 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,5 \rangle, \langle 5,3 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 4,2 \rangle\}$. Які властивості має задане відношення?

Розв'язання: Побудуємо матрицю відношення (рис. 2.9):

R_1	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	1	0	0
2	1	1	0	1	0	0
3	0	0	1	0	1	0
4	1	1	0	1	0	0
5	0	0	1	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

Рис. 2.9.

Відношення R_1 рефлексивне, тому що для кожного $a \in A$, $\langle a,a \rangle \in R_1$. Головна діагональ матриці відношення R_1 містить одиниці.

Відношення R_1 не є антирефлексивне, тому що з умови $\langle a,b \rangle \in R$ не треба $a \neq b$, наприклад, $\langle 2,2 \rangle \in R_1$, але $2 = 2$.

Розглянувши всі можливі випадки методом безпосереднього пересkладання (табл. 2.2,а) можна показати, що відношення R_1 симетрично. Крім того, матриця відношення R_1 симетрична щодо головної діагоналі.

Таблиця 2.2,а.

№	$\langle a,b \rangle \in R_1$	$\langle b,a \rangle$	$\langle b,a \rangle \in R_1$?
1	$\langle 1,2 \rangle$	$\langle 2,1 \rangle$	так
2	$\langle 1,4 \rangle$	$\langle 4,1 \rangle$	так
3	$\langle 2,1 \rangle$	$\langle 1,2 \rangle$	так
4	$\langle 2,4 \rangle$	$\langle 4,2 \rangle$	так
5	$\langle 3,5 \rangle$	$\langle 5,3 \rangle$	так
6	$\langle 5,3 \rangle$	$\langle 3,5 \rangle$	так
7	$\langle 4,1 \rangle$	$\langle 1,4 \rangle$	так
8	$\langle 4,2 \rangle$	$\langle 2,4 \rangle$	так

R_1 не є антисиметричне, тому що $\langle 3,5 \rangle \in R_1$ і $\langle 5,3 \rangle \in R_1$, але $3 \neq 5$. Скориставшись методом безпосереднього пересkладання (табл. 2.2,б) можна також показати, що відношення R_1 транзитивне.

Таблиця 2.2,б.

№	$\langle a,b\rangle \in R_1$	$\langle b,c\rangle \in R_1$	$\langle a,c\rangle$	$\langle a,c\rangle \in R_1$?
1	$\langle 1,2\rangle$	$\langle 2,1\rangle$	$\langle 1,1\rangle$	так
2	$\langle 1,2\rangle$	$\langle 2,2\rangle$	$\langle 1,2\rangle$	так
3	$\langle 1,2\rangle$	$\langle 2,4\rangle$	$\langle 1,4\rangle$	так
4	$\langle 1,4\rangle$	$\langle 4,1\rangle$	$\langle 1,1\rangle$	так
5	$\langle 1,4\rangle$	$\langle 4,2\rangle$	$\langle 1,2\rangle$	так
6	$\langle 1,4\rangle$	$\langle 4,4\rangle$	$\langle 1,4\rangle$	так
7	$\langle 2,1\rangle$	$\langle 1,1\rangle$	$\langle 2,1\rangle$	так
8	$\langle 2,1\rangle$	$\langle 1,2\rangle$	$\langle 2,2\rangle$	так
9	$\langle 2,1\rangle$	$\langle 1,4\rangle$	$\langle 2,4\rangle$	так
10	$\langle 2,4\rangle$	$\langle 4,1\rangle$	$\langle 2,1\rangle$	так
11	$\langle 2,4\rangle$	$\langle 4,2\rangle$	$\langle 2,2\rangle$	так
12	$\langle 2,4\rangle$	$\langle 4,4\rangle$	$\langle 2,4\rangle$	так
13	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 5,3\rangle$	$\langle 3,3\rangle$	так
14	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 5,5\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	так
15	$\langle 4,1\rangle$	$\langle 1,1\rangle$	$\langle 4,1\rangle$	так
16	$\langle 4,1\rangle$	$\langle 1,2\rangle$	$\langle 4,2\rangle$	так
17	$\langle 4,1\rangle$	$\langle 1,4\rangle$	$\langle 4,4\rangle$	так
18	$\langle 4,2\rangle$	$\langle 2,1\rangle$	$\langle 4,1\rangle$	так
19	$\langle 4,2\rangle$	$\langle 2,2\rangle$	$\langle 4,2\rangle$	так
20	$\langle 4,2\rangle$	$\langle 2,4\rangle$	$\langle 4,4\rangle$	так
21	$\langle 5,3\rangle$	$\langle 3,3\rangle$	$\langle 5,3\rangle$	так
22	$\langle 5,3\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	$\langle 5,5\rangle$	так

<u>Приклад 2.9.</u> Які властивості мають відношення:

1. На множині натуральних чисел N :
   а) R_1 - «бути не менше»;
   б) R_2 - «бути рівним»;
   в) R_3 - «їх сума – парне число».
2. На множині точок дійсної площини R :
   а) R_4 - «бути на одній відстані від початку координат»;
   б) R_5 - «бути симетричним відносно осі Oy »;
   в) R_6 - «знаходитися в одному квадранті».
3. На множині: «велика кількість людей»:
   а) R_7 - «бути дочкою»;
   б) R_8 - «бути сестрою»;
   в) R_9 - «жити в одній країні».
4. На множині елементів структури (рис. 2.5):
   а) R_{10} - «бути безпосередньо пов'язаним з…»;
   б) R_{11} - «бути безпосереднім керівником»;
   в) R_{12} - «бути керівником».

Розв'язання:

1. На множині натуральних чисел N :
   а) $R_1 = \{\langle a,b\rangle | a \geq b\}$
   - рефлексивне, не антирефлексивне, тому що $a \geq a$ виконується для всіх $a \in N$. Наприклад, $5 \geq 5$;
   - не симетричне, тому що $5 \geq 2$, але $2 \geq 5$ - невірно;
   - антисиметричне, тому що $a \geq b$ і $b \geq a$ виконуються тільки коли $a = b$;
   - транзитивне, тому що коли $a \geq b$ і $b \geq c$, то $a \geq c$. Наприклад, $8 \geq 5$, $5 \geq 1$ і $8 \geq 1$.

   б) $R_2 = \{\langle a,b\rangle | a = b\}$

- рефлексивне, не антирефлексивне, тому що виконується $a = a$ для всіх $a \in N$. Наприклад, $5 = 5$;
- симетричне, тому що коли $a = b$, то і $b = a$;
- антисиметричне, тому що коли $\langle a, b\rangle \in R_2$ і $\langle b, a\rangle \in R_2$, то $a = b$;
- транзитивне, тому що коли $a = b$ і $b = c$, то і $a = c$.

в) $R_3 = \{\langle a, b\rangle | a + b = 2n,\ n \in N\}$

- рефлексивне, не антирефлексивне, тому що сума двох парних чисел і двох непарних чисел є число парне. Наприклад, $4 + 6 = 10$ - парне і $5 + 7 = 12$ - парне;
- симетричне, не антисиметричне, тому що коли $a + b$ - парне, то і $b + a$ - теж парне (від переставлення доданків сума не міняється). Наприклад,и $3 + 5 = 8$ - парне і $5 + 3 = 8$ - теж парне, $2 + 4 = 6$ - парне і $4 + 2 = 6$ - теж парне;
- транзитивне, тому що якщо $a + b$ - парне, $b + c$ - парне, то і $a + c$ - теж парне. Наприклад, $1 + 3 = 4$ - парне і $3 + 11 = 14$ - парне, то і $1 + 11 = 12$ - теж парне.

2. На множині точок дійсної площини R:

а) $R_4 = \{\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle | (x_1)^2 + (y_1)^2 = (x_2)^2 + (y_2)^2\}$:

- рефлексивне, не антирефлексивне, тому що $x^2 + y^2 = x^2 + y^2$ для будь-яких точок (x, y) дійсної площини;
- симетричне, не антисиметричне, тому що, наприклад, для точок $(5,4)$ і $(5,-4)$ має місце рівність $5^2 + 4^2 = 5^2 + (-4)^2$, але при цьому $(5,4) \neq (5,-4)$;
- транзитивне, тому що якщо (x_1, y_1) і (x_2, y_2) перебувають на однаковій відстані від початку координат $(x_1)^2 + (y_1)^2 = (x_2)^2 + (y_2)^2$,
  а також (x_2, y_2) і (x_3, y_3) задовольняють умові $(x_2)^2 + (y_2)^2 = (x_3)^2 + (y_3)^2$, то точки (x_1, y_1) і (x_3, y_3)

теж перебувають на однаковій відстані від початку координат: $(x_1)^2+(y_1)^2=(x_3)^2+(y_3)^2$.

б) $R_5=\{\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle \mid x_1=-x_2, y_1=y_2\}$:

- не рефлексивне, тому що для жодної із точок (x,y) площини, що не лежать на осі Oy $(x\neq 0)$ не виконується $\langle(x,y),(x,y)\rangle\in R_5$;
- не антирефлексивне, тому що точка площини симетрична самої собі, якщо вона лежить на осі Oy. Тобто для точок (x,y) з $x=0$ має місце рівність $\langle(x,y),(x,y)\rangle\in R_5$;
- симетричне, наприклад, $\langle(3,5),(-3,5)\rangle\in R_5$ і $\langle(-3,5),(3,5)\rangle\in R_5$;
- не антисиметричне, тому що $\langle(3,5),(-3,5)\rangle\in R_5$ і $\langle(-3,5),(3,5)\rangle\in R_5$, але $(3,5)\neq(-3,5)$;
- не транзитивне, тому що $\langle(3,5),(-3,5)\rangle\in R_5$ і $\langle(-3,5),(3,5)\rangle\in R_5$, але не виконується $\langle(3,5),(3,5)\rangle\in R_5$.

в) $R_6=\{\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle \mid x_1\cdot x_2>0, y_1\cdot y_2>0\}$:

- рефлексивне, не антирефлексивне, тому що та сама точка лежить у тому самому квадранті $\langle(x,y),(x,y)\rangle\in R_6$;
- симетричне, наприклад, якщо $\langle(-7,2),(-3,4)\rangle\in R_6$, то і $\langle(-3,4),(-7,2)\rangle\in R_6$;
- не антисиметричне, тому що виконуються $\langle(-7,2),(-3,4)\rangle\in R_6$ і $\langle(-3,4),(-7,2)\rangle\in R_6$, але при цьому $(-3,4)\neq(-7,2)$;

- транзитивне, тому що, наприклад, коли $\langle(-7,2),(-3,4)\rangle \in R_6$ і $\langle(-3,4),(-5,6)\rangle \in R_6$ також і $\langle(-7,2),(-5,6)\rangle \in R_6$.

3. На множині: «велика кількість людей»:

а) $R_7 = \{\langle a,b\rangle | a - \text{дочка } b\}$:

- не рефлексивне, антирефлексивне, тому що ні для яких a не може бути виконана умова $a - \text{дочка } b$, а з умови $\langle a,b\rangle \in R_7$ треба, щоб $a \neq b$;
- не симетричне, антисиметричне, тому що ні для яких $a \neq b$ не виконується $a - \text{дочка } b$ і $b - \text{дочка } a$;
- не транзитивне, тому що якщо $a - \text{дочка } b$, а $b -$ дочка c, то $a -$ не дочка c, а її онука.

б) $R_8 = \{\langle a,b\rangle | a - \textit{сестра } b\}$:

- не рефлексивне, антирефлексивне, тому що та ж сама людина не може бути сама собі сестрою;
- не симетричне, тому що в загальному випадку, якщо між братом a і сестрою b має місце $\langle a,b\rangle \in R_7$, то $\langle b,a\rangle \notin R_7$;
- не антисиметричне, тому що якщо a і b - сестри, то $\langle a,b\rangle \in R_7$ і $\langle b,a\rangle \in R_7$, але $a \neq b$;
- транзитивне, якщо вважати сестрами людей, що мають загальних батьків.

в) $R_9 = \{\langle a,b\rangle | a \text{ живе у одній крайні з } b\}$:

- рефлексивне, не антирефлексивне, тому що кожна людина живе в одній і тій же країні із самим собою, тобто $\langle a,a\rangle \in R_9$.
- симетричне, тому що якщо a живе в одній країні з b, то і b живе в одній країні з a, тобто якщо $\langle a,b\rangle \in R_9$, то і $\langle b,a\rangle \in R_9$;

- не антисиметричне, тому що з умов $\langle a,b\rangle \in R_9$ і $\langle b,a\rangle \in R_9$ не прямує $a=b$;
- транзитивне, тому що якщо a живе в одній країні з b, b - в одній країні з c, то a живе в одній країні з c.

4. На множині елементів структури (рис. 2.5):

а) $R_{11} = \{\langle a, b\rangle | a \quad \text{безпосередньо зв}'\text{язан з} \quad b\}$:
- не рефлексивне, не антирефлексивне, тому що $\langle a,a\rangle \in R_{11}$ не має сенсу;
- симетричне, не антисиметричне, тому що для всіх $a \neq b$, якщо виконується $\langle a,b\rangle \in R_{11}$, то виконується і $\langle b,a\rangle \in R_{11}$;
- не транзитивне, тому що $\langle a,b\rangle \in R_{11}$, $\langle b,e\rangle \in R_{11}$, але $\langle a,e\rangle \notin R_{11}$ (a і e зв'язані, але опосередковано).

б) $R_{12} = \{\langle a, b\rangle | a \quad \text{керівник} \quad b\}$:
- не рефлексивне, антирефлексивне, тому що a не може бути керівником самому собі;
- не симетричне, антисиметричне, тому що якщо a - керівник b, то не може бути b керівником a;
- транзитивне, тому що якщо a - керівник b, а b - керівник e, то a – керівник e.

Завдання:

18. $A=\{a,b,c,d,e\}$, а R_1, R_2, R_3, R_4 - відношення на A:

$R_1 = \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,e\rangle,\langle e,d\rangle,\langle c,a\rangle\}$;

$R_2 = \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle e,e\rangle,\langle d,e\rangle,\langle c,b\rangle\}$;

$R_3 = \{\langle a,b\rangle,\langle a,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle e,e\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,$
$\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$;

$R_4 = \{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle e,e\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$.

Побудувати матриці заданих відношень і з'ясувати, яке з них:
а) симетричне?
б) рефлексивне?
в) транзитивне?
г) антисиметричне?

19. $A = \{a, b, c, d, e\}$. Опишіть відношення на A:
а) рефлексивне, але не симетричне, не транзитивне;
б) симетричне, але не рефлексивне, не транзитивне;
в) транзитивне, але не симетричне, не рефлексивне;
г) рефлексивне і симетричне, але не транзитивне;
д) симетричне і транзитивне, але не рефлексивне.

20. Якими властивостями характеризуються наступні відношення на множині $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$:
а) $R_1 = \{\langle a, b\rangle | a + b \quad - \quad \text{непарне}\}$;
б) $R_2 = \{\langle a, b\rangle | (a + 2) \quad - \quad \text{дільник} \quad (a + b)\}$;
в) $R_3 = \{\langle a, b\rangle | a \quad - \quad \text{дільник} \quad (ab + 1), a \neq 1\}$.

21. Якими властивостями характеризуються зазначені нижче відношення. Побудувати матриці відношень:

а) відношення, задані на множині елементів структури, зображеної на рис. 2.8:
R_1 - «*бути безпосередньо зв'язаним з..*»;
R_2 -«*бути начальником*»;
R_3 - «*бути безпосереднім начальником*».

б) відношення, задані на множині членів родини, що складається з 5 чоловік: бабуся, тато, мама, син, дочка, які проживають в 4-х кімнатній квартирі. В 1-й кімнаті - бабуся, в 2-й – мама і тато, в 3-й - син, в 4-й - дочка. За умови, що тато старіший від дружини, дочка старіша від брата, а бабуся - мама татка:
R_4 - «*бути старше*»;

R_5 - «*бути сином (дочкою)*»;

R_6 - «*мати спільну кімнату*».

в) відношення, задані на множині міст України: Харків, Полтава, Чугуїв, Кременчук, Богодухів, Донецьк, Горлівка, Конотоп, Ахтирка, Херсон, Каховка, Луцьк:

R_7 - «*знаходитися в одній області*»;

R_8 - «*знаходитися в сусідніх областях (мають спільну межу)*».

2.3. Операції над бінарними відношеннями

Відношення на множині A задаються підмножинами $R \subseteq A \times B$, тому для них визначні ті ж операції, що й над множинами, а саме:

1. ***Об'єднання***: $R_1 \cup R_2 = \{\langle a,b\rangle | \langle a,b\rangle \in R_1 \;\; або \;\; \langle a,b\rangle \in R_2\}$.
2. ***Перетинання:*** $R_1 \cap R_2 = \{\langle a,b\rangle | \langle a,b\rangle \in R_1 \;\; i \;\; \langle a,b\rangle \in R_2\}$.
3. ***Різниця:*** $R_1 - R_2 = \{\langle a,b\rangle | \langle a,b\rangle \in R_1 \;\; i \;\; \langle a,b\rangle \notin R_2\}$.
4. ***Доповнення:*** $\overline{R} = U - R$, де $U = A \times B$.

Крім того, необхідно визначити інші, ще не знайомі нам, операції над бінарними відношеннями.

5. ***Обернене відношення*** R^{-1}.

<u>Визначення 2.11.</u> Якщо $\langle a,b\rangle \in R$ - відношення, то відношення R^{-1} називається *оберненим відношенням* до даного відношення R тоді й тільки тоді, коли $R^{-1} = \{\langle b,a\rangle | \langle a,b\rangle \in R\}$.

Наприклад, якщо R - «бути старше», то R^{-1} - «бути молодше»; якщо R - «бути дружиною», то R^{-1} - «бути чоловіком».

Нехай $R = \{\langle a, b\rangle | b \text{ є родич } a\}$ або $R = \{\langle x, y\rangle | x^2 + y^2 = 1\}$. У такому випадку $R = R^{-1}$.

Приклад 2.10. Знайти відношення R^{-1}, обернене даному $R = \{\langle 1, r\rangle, \langle 1, f\rangle, \langle 2, k\rangle, \langle 3, r\rangle\}$.

Розв'язання: $R^{-1} = \{\langle r, 1\rangle, \langle f, 1\rangle, \langle k, 2\rangle, \langle r, 3\rangle\}$.

6. ***Композиція*** (або *складене відношення*):

Визначення 2.12. Нехай $R \subseteq A \times B$ - відношення на $A \times B$, а $S \subseteq B \times C$ - відношення на $B \times C$. *Композицією* відношень R і S називається відношення $T \subseteq A \times C$, певне як $T = \{\langle a, c\rangle | \text{існує такий елемент } b \text{ з } B, \text{ що } \langle a, b\rangle \in R \text{ і } \langle b, c\rangle \in S\}$. Ця множина позначається $T = S \circ R$.

Зокрема, якщо відношення R визначене на множині A $(R \subseteq A^2)$, то композиція визначається як

$$R \circ R = R^{(2)} = \{\langle a, c\rangle | \langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle \in R\}.$$

Приклад 2.11. Нехай $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{\Delta, \mathrm{O}\}$, і нехай відношення R на $A \times B$ і S на $B \times C$ задані у вигляді

$$R = \{\langle 1, x\rangle, \langle 2, x\rangle, \langle 3, z\rangle, \langle 4, y\rangle\};$$

$$S = \{\langle x, \Delta\rangle, \langle x, \mathrm{O}\rangle, \langle y, \Delta\rangle, \langle y, \mathrm{O}\rangle, \langle z, \mathrm{O}\rangle\}.$$

Знайти композицію $S \circ R$.

Розв'язання:

$\langle 1, x\rangle \in R$	і	$\langle x, \Delta\rangle \in S$;	$\langle 1, \Delta\rangle \in S \circ R$;
$\langle 1, x\rangle \in R$	і	$\langle x, \mathrm{O}\rangle \in S$;	$\langle 1, \mathrm{O}\rangle \in S \circ R$;
$\langle 2, x\rangle \in R$	і	$\langle x, \Delta\rangle \in S$;	$\langle 2, \Delta\rangle \in S \circ R$;

$\langle 2, x\rangle \in R$	і	$\langle x, \mathrm{O}\rangle \in S$;	$\langle 2, \mathrm{O}\rangle \in S \circ R$;
$\langle 3, z\rangle \in R$	і	$\langle z, \mathrm{O}\rangle \in S$;	$\langle 3, \mathrm{O}\rangle \in S \circ R$;
$\langle 4, y\rangle \in R$	і	$\langle y, \Delta\rangle \in S$;	$\langle 4, \Delta\rangle \in S \circ R$;
$\langle 4, y\rangle \in R$	і	$\langle y, \mathrm{O}\rangle \in S$;	$\langle 4, \mathrm{O}\rangle \in S \circ R$.

Отже, $S \circ R = \{\langle 1, \Delta\rangle, \langle 1, \mathrm{O}\rangle, \langle 2, \Delta\rangle, \langle 2, \mathrm{O}\rangle, \langle 3, \mathrm{O}\rangle, \langle 4, \Delta\rangle, \langle 4, \mathrm{O}\rangle\}$.

Приклад 2.12. Нехай R і S - бінарні відношення, задані на множині додатних цілих чисел у вигляді $R = \{\langle x, y\rangle | y = x^3\}$ і $S = \{\langle x, y\rangle | y = x + 5\}$. Знайти композиції $R \circ S$ і $S \circ R$.

Розв'язання:

$S \circ R = \{\langle x, y\rangle | y = x^3 + 5\}$, $\qquad R \circ S = \{\langle x, y\rangle | y = (x+5)^3\}$.

7. *Транзитивне замикання:*

Визначення 2.13. *Транзитивним замиканням* R^{O} називається множина, що складається з таких і тільки таких пар елементів a, b з A, тобто $\langle a, b\rangle \in R^{\mathrm{O}}$, для яких в A існує ланцюжок з $n+2$ $(n \geq 0)$ елементів $A: a, c_1, c_2, ..., c_n, b$, між сусідніми елементами якої виконується відношення R: $\langle a, c_1\rangle \in R$, $\langle c_1, c_2\rangle \in R, \ldots, \langle c_n, b\rangle \in R$, тобто

$$R^{\mathrm{O}} = \{\langle a, b\rangle | \langle a, c_1\rangle, \langle c_1, c_2\rangle, ..., \langle c_n, b\rangle \in R\}.$$

Наприклад, для відношення R - «бути дочкою» композиція $R \circ R = R^{(2)}$ - «бути онукою», $R \circ R \circ R = R^{(3)}$ - «бути правнучкою» і т.д. Тоді об'єднання всіх цих відносин є транзитивне замикання R^{O} - «бути прямим нащадком».

Якщо відношення R транзитивне, то $R^{\mathrm{O}} = R$.

<u>Визначення 2.14.</u> *Транзитивне замикання* R^{O} на R є найменше транзитивне відношення на A, що містить R як підмножину.

Процедура обчислення транзитивного замикання R^{O} для відношення $R \in A \times A$:

1) привласнити $R_1 \leftarrow R$;
2) обчислити $R_1 \cup R_1^{(2)} = R_1 \cup R_1$, привласнити $R_2 \leftarrow R_1^{(2)}$;
3) зрівняти R_1 і R_2. Якщо $R_1 = R_2$, то перейти до кроку 4, якщо $R_1 \neq R_2$, то привласнити $R_1 \leftarrow R_2$ і перейти до кроку 2;
4) $R_1 = R_2 = R^{\mathrm{O}}$.

8. *Рефлексивне замикання:*

<u>Визначення 2.15.</u> Нехай тотожне відношення $E = \{\langle a, a\rangle | a \in A\}$. Тоді *рефлексивне замикання* визначається як $R^* = R^{\mathrm{O}} \cup E$.

Якщо R транзитивне і рефлексивно, то $R^* = R$.

<u>Приклад 2.13.</u> Нехай R - відношення на множині дійсних чисел «бути менше». Знайти рефлексивне замикання відношення R.

Розв'язання:

$R = \{\langle a, b\rangle | a < b\}$,

$R^{\mathrm{O}} = R$, тому що R - транзитивне,

тоді $R^* = R^{\mathrm{O}} \cup E = \{\langle a, b\rangle | a < b \quad \text{або} \quad a = b\} = \{\langle a, b\rangle | a \leq b\}$ - «бути не менше».

<u>Визначення 2.16.</u> *Рефлексивне замикання* R^* на R є найменше рефлексивне відношення на A, що містить R як підмножину.

Розглянемо приклади операцій над бінарними відношеннями.

Приклад 2.14. Нехай на множині натуральних непарних чисел $A = \{1,3,5,7\}$ визначено відношення R - «бути більше». Задати характеристичною властивістю і списком відношення R, обернене відношення R^{-1}, доповнення $\overline{R}$, композицію $R \circ R$, транзитивне замикання R^{O} і рефлексивне замикання R^{*}.

Розв'язання:

$R = \{\langle a,b\rangle | a > b\}$ - «бути більше»;

$R = \{\langle 3,1\rangle, \langle 5,1\rangle, \langle 5,3\rangle, \langle 7,1\rangle, \langle 7,3\rangle, \langle 7,5\rangle\}$.

$R^{-1} = \{\langle a,b\rangle | a < b\}$ - «бути менше»;

$R^{-1} = \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 3,7\rangle, \langle 5,7\rangle\}$.

$\overline{R} = (A \times A) - R = \{\langle a,b\rangle | a \le b\}$ - «бути не більше»;

$\overline{R} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 3,7\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,7\rangle, \langle 7,7\rangle\}$.

$R \circ R = \{\langle 5,1\rangle, \langle 7,1\rangle, \langle 7,3\rangle\}$;

$R^{O} = R$, тому що R - транзитивне.

$R^{*} = R^{O} \cup E = \{\langle a,b\rangle | a > b \text{ або } a = b\} = \{\langle a,b\rangle | a \ge b\}$ - «бути більше або дорівнює», де E - тотожне відношення, $E = \{\langle a,b\rangle | a = b\}$;

$R^{*} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 5,1\rangle, \langle 5,3\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 7,1\rangle, \langle 7,3\rangle, \langle 7,5\rangle, \langle 7,7\rangle\}$.

Приклад 2.15. Нехай на множині натуральних чисел задані відношення $R_1 = \{\langle a,b\rangle | b = a + 3;\ \ a,b \in N\}$ і $R_2 = \{\langle a,b\rangle | b = a^3;\ \ a,b \in N\}$. Визначити відношення: $R_1 \circ R_2$; $R_2 \circ R_1$; $R_1 \circ R_1 = R_1^{(2)}$; $R_2 \circ R_2 = R_2^{(2)}$.

Розв'язання:

$R_1 \circ R_2 = \{\langle a,b\rangle | \langle a,c\rangle \in R_1, \langle c,b\rangle \in R_2; a,b,c \in N\}$

$\langle a,c\rangle = \langle a,a+3\rangle$; $\langle b,c\rangle = \langle a,a^3\rangle$;

$\langle a,c\rangle = \langle a,a+3\rangle$; $\langle c,b\rangle = \langle a^3,a\rangle$;

$c \leftrightarrow a$; $\Rightarrow c = a+3;\ b = c^3 \quad \Rightarrow$

$$R_1 \circ R_2 = \left\{\langle a,b\rangle \middle| b = (a+3)^3; a,b \in N\right\} = \{\langle 1,64\rangle, \langle 2,125\rangle, \langle 3,216\rangle, \langle 4,343\rangle, ...\}$$

Аналогічно знайдемо

$$R_2 \circ R_1 = \left\{\langle a,b\rangle \middle| b = a^3+3; a,b \in N\right\} = \{\langle 1,4\rangle, \langle 2,11\rangle, \langle 3,30\rangle, \langle 4,67\rangle, ...\};$$

$$R_1 \circ R_1 = R_1^{(2)} = \left\{\langle a,b\rangle \middle| b = a+6; a,b \in N\right\} = \{\langle 1,7\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 3,9\rangle, \langle 4,10\rangle, ...\}$$

;

$$R_2 \circ R_2 = R_2^{(2)} = \left\{\langle a,b\rangle \middle| b = a^6; a,b \in N\right\} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,64\rangle, \langle 3,729\rangle, \langle 4,4096\rangle, ...\}$$

Приклад 2.16. Нехай структура деякого малого підприємства може бути представлена схемою на рис. 2.10. Виходячи із представленої схеми, задати матрицями відношення R_1 - «*бути в підлеглості у…*» і R_2 - *«бути підлеглим»*. Визначити властивості відношень. Переконатися в тім, що транзитивним замиканням відношень R_1^{O} і R_2^{O} є відношення R_2.

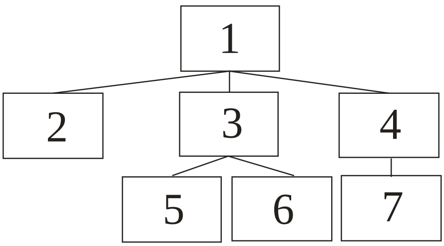


Рис. 2.10.

Розв'язання:

Відношення задані на множині $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Матриці відношень R_1 і R_2 наведені на рис. 2.11. Елементи відношень R_1 і R_2 мають вигляд:

$$R_1 = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 5,3\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 7,4\rangle\};$$
$$R_2 = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 5,1\rangle, \langle 5,3\rangle, \langle 6,1\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 7,1\rangle, \langle 7,4\rangle\}.$$

R_1	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	1	0	0	0

R_2	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0
6	1	0	1	0	0	0	0
7	1	0	0	1	0	0	0

Рис. 2.11.

Опишемо властивості отриманих відношень:

відношення R_1 - нерефлексивне, антирефлексивне, несиметричне, антисиметричне, нетранзитивне;

відношення R_2 - нерефлексивне, антирефлексивне, несиметричне, антисиметричне, транзитивне.

В наслідок того, що відношення R_1 не транзитивне, скористаємося визначенням транзитивного замикання і процедурою одержання транзитивного замикання. Для цього проаналізуємо елементи відношення R_1, для яких порушені умови транзитивності (табл. 2.3).

Таблиця 2.3.

Присутні	Відсутні
$\langle 5,3\rangle$, $\langle 3,1\rangle$	$\langle 5,1\rangle$
$\langle 6,3\rangle$, $\langle 3,1\rangle$	$\langle 6,1\rangle$
$\langle 7,4\rangle$, $\langle 4,1\rangle$	$\langle 7,1\rangle$

Додамо до відношення R_1 елементи, для яких порушена умова транзитивності: $\{\langle 5,1\rangle, \langle 6,1\rangle, \langle 7,1\rangle\}$ і одержимо відношення R_1'. Відношення R_1' збігається з відношенням R_2 - «*бути підлеглим*». Можна переконатися, що

$$R_1' = R_1 \cup R_1 \circ R_1 = R_1 \cup R_1^{(2)}.$$

Отже, отриманий список відношення R_1' є транзитивним замиканням відношення R_1, тобто $R_1' = R_1^{\mathrm{O}}$.

Оскільки відношення R_2 транзитивне, то $R_2^{\mathrm{O}} = R_2$. Таким чином $R_1^{\mathrm{O}} = R_2^{\mathrm{O}} = R_2$.

2.4. Правила побудови матриць відношень

Правила побудови матриць відношень: $\overline{R}$, R^{-1}, $R^{(2)}$, R^{O}, R^* *по відомій матриці відношення* R*:*

Матриця доповнення $\overline{R}$: в матриці вихідного відношення R замінити одиниці нулями, а нулі – одиницями.

Матриця оберненого відношення R^{-1}: проставити в ній одиниці, які симетричні щодо головної діагоналі відповідним одиницям вихідної матриці відношення R.

Матриця складеного відношення $R^{(2)}$: для кожної одиниці вихідної матриці відношення R, що стоїть в i-тому рядку і j-тому стовпці $(c_{ij} = 1)$, в i-тому рядку матриці $R^{(2)}$, проставити одиниці в ті k-ті стовпці, у яких є одиниці в j-тому рядку вихідної матриці.

Матриця транзитивного замикання R^{O} нетранзитивного відношення R. Для її побудови треба виконати цикл (один або декілька) наступних дій:

а) для кожної одиниці у матриці відношення R, що стоїть в i-тому рядку і j-тому стовпці $\left(c_{ij}=1\right)$, в i-тому рядку матриці R^{O} проставити одиниці в тих k-тих стовпцях, у яких є одиниці в i-тому рядку, а також в j-тому рядку вихідної матриці;

б) отриману матрицю відношення $R = R \cup R \circ R = = R \cup R^{(2)}$ приймають за вихідну і повторюють процедуру а), виконуючи таким чином наступний цикл обчислень доти, поки матриця не перестане змінюватися, тобто поки в деякому циклі обчислень вихідна і обчислена матриці не збіжаться.

Якщо відношення R транзитивне, то матриця його транзитивного замикання збігається з матрицею вихідного відношення, тобто $R^{\text{O}} = R$.

Матриця рефлексивного замикання R^*: побудувати матрицю транзитивного замикання, а потім в отриманій матриці замінити нулі на головній діагоналі, якщо такі є, на одиниці.

Якщо відношення R рефлексивно, то матриця рефлексивного замикання збіжиться з матрицею транзитивного замикання, тобто $R^* = R^{\text{O}}$.

<u>Приклад 2.17.</u> Які властивості відношення R, заданого матрицею на рис. 2.12? Виконати операції над відношенням R. Побудувати матриці отриманих відношень.

Розв’язання:

R	a	b	c
a	0	0	1
b	0	1	0
c	0	1	0

Рис. 2.12.

Список відношення $R = \{\langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,b\rangle\}$.

Визначимо властивості відношення R:

а) нерефлексивне, тому що головна діагональ матриці відношення не містить тільки одиниці;

б) не антирефлексивне, тому що головна діагональ матриці відношення не містить тільки нулі;

б) несиметричне, тому що матриця відношення R не симетрична щодо головної діагоналі;

в) не антисиметричне, тому що в матриці відношення R відсутні одиниці, симетричні щодо головної діагоналі;

г) нетранзитивне, тому що існують пари, для яких порушується умова транзитивності, наприклад, $\langle a,c\rangle \in R$, $\langle c,b\rangle \in R$, але $\langle a,b\rangle \notin R$.

Виконаємо операції над R:

$R \cup R = R$;

$R - R = \varnothing$;

$R \cap R = R$;

$\overline{R} = U - R = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,c\rangle\}$ (див. матрицю на рис. 2.13,а);

$R^{-1} = \{\langle c,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle\}$ (див. матрицю на рис. 2.13,б);

$R \circ R = R^{(2)} = \{\langle a,b\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,b\rangle\}$ (див. матрицю на рис. 2.13,в).

Для одержання транзитивного замикання R^{O} виконаємо процедуру виявлення нетранзитивності для вихідного відношення. Виявлений тільки один випадок порушення транзитивності $\langle a,c\rangle \in R$, $\langle c,b\rangle \in R$, але $\langle a,b\rangle \notin R$. Додавши цю пару до R, або скориставшись визначенням, одержимо:

$$R' = R \cup R^{(2)} = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,b\rangle\}.$$

Перевірка на транзитивність відношення R' не виявляє в ньому порушення транзитивності, тому

$R^{\mathrm{O}} = R' = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,b\rangle\}$ (див. матрицю на рис. 2.13,г).

Рефлексивне замикання, відповідно до визначення $R^* = R^{\mathrm{O}} \cup E = \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$ (див. матрицю на рис. 2.13,д).

$\overline{R}$	a	b	c
a	1	1	0
b	1	0	1
c	1	0	1

(а)

R^{-1}	a	b	c
a	0	0	0
b	0	1	1
c	1	0	0

(б)

$R^{(2)}$	a	b	c
a	0	1	0
b	0	1	0
c	0	1	0

(в)

R^{O}	a	b	c
a	0	1	1
b	0	1	0
c	0	1	0

(г)

R^*	a	b	c
a	1	1	1
b	0	1	0
c	0	1	1

(д)

Рис. 2.13.

Завдання:

22. Назвати відношення: $\overline{R}$, R^{-1}, $R^{(2)}$, R^{O}, R^*, якщо відношення R - це:
    а) «бути сестрою»; б) «бути мамою»;
    в) «бути начальником»; г) «бути колегою».

23. На множинах $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{6,7,8,9\}$, $C=\{10,11,12,13\}$ і $D=\{\Delta,\mathrm{O},*,\nabla\}$ визначені відношення $R \subseteq A\times B$, $S \subseteq B\times C$ і $T =\subseteq C\times D$ таким чином:
    $R=\{\langle 1,7\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 5,6\rangle,\langle 2,8\rangle\}$;
    $S=\{\langle 6,10\rangle,\langle 6,11\rangle,\langle 7,10\rangle,\langle 8,13\rangle\}$;
    $T=\{\langle 11,\Delta\rangle,\langle 10,\Delta\rangle,\langle 13,*\rangle,\langle 12,\nabla\rangle,\langle 13,\mathrm{O}\rangle\}$.

Визначити відношення:

а) R^{-1} і S^{-1}; б) $T \circ (S \circ R)$;

в) $R \circ R^{-1}$ і $R^{-1} \circ R$; г) $(T \circ S) \circ R$;

д) $S \circ R$ і $S \circ T$; е) $R^{-1} \circ S^{-1}$.

24. Нехай $A = \{\langle b,a\rangle, \langle c,e,\rangle, \langle d,i\rangle, \langle f,o\rangle, \langle g,u\rangle\}$ і $B = \{\langle 1,a\rangle, \langle 2,e\rangle, \langle 3,i\rangle, \langle 4,o\rangle, \langle 5,u\rangle\}$. Опишіть відношення: A^{-1}; B^{-1}; $A^{-1} \circ B$; $B^{-1} \circ A$.

25. На множині $A = \{a,b,c,d,e\}$ визначені відношення:

$R_1 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle c,e\rangle, \langle e,d\rangle, \langle c,a\rangle\}$;

$R_2 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle e,e\rangle, \langle d,e\rangle, \langle c,b\rangle\}$;

$R_3 = \{\langle a,b\rangle, \langle a,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle e,e\rangle, \langle b,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle, \langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle\}$

$R_4 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle e,e\rangle, \langle b,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle d,d\rangle, \langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle\}$.

Опишіть відношення $R_1 \cup R_2$; $R_3 \cap R_4$; $R_3 - R_2$.

У вправах 26, 27, 28 і 29 установити істинність або хибність кожного з наведених нижче висловлень. Для кожного помилкового висловлення приведіть контрприклад.

26. Якщо відношення R_1 і R_2 рефлексивні, то кожне з відношень $R_1 \cap R_2$; $R_1 \cup R_2$; $R_1 \circ R_2$ і $(R_1 - R_2)$ рефлексивне.
27. Якщо відношення R_1 і R_2 симетричні, то кожне з відношень $R_1 \cap R_2$; $R_1 \cup R_2$; $R_1 \circ R_2$ і $(R_1 - R_2)$ симетричне.
28. Якщо відношення R_1 і R_2 антисиметричні, то кожне з відношень $R_1 \cap R_2$; $R_1 \cup R_2$; $R_1 \circ R_2$ і $(R_1 - R_2)$ антисиметричне.
29. Якщо відношення R_1 і R_2 транзитивні, то кожне з відношень: $R_1 \cap R_2$; $R_1 \cup R_2$; $R_1 \circ R_2$ і $(R_1 - R_2)$ транзитивне.
30. На множині $A = \{2,5,7,10\}$ визначене відношення R - «*бути менше*». Задати характеристичною властивістю і списком

відношення: R; R^{-1}; $\overline{R}$; $R \circ R$; R^{O} і R^{*}. Визначити властивості цих відношень.

31. На множині $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ задані відношення: $R_1 = \{\langle a,b \rangle | a \geq b\}$; $R_2 = \{\langle a,b \rangle | a = b\}$; $R_3 = \{\langle a,b \rangle | a < b\}$. Виконати операції над відношеннями R_i. Тобто знайти: $R_i \cup R_j$; $R_i - R_j$; $R_i \cap R_j$; $\overline{R}_i$; R_i^{-1}; R_i^{o}; і R_i^{*}, де (i, j = 1,2,3).

32. На рис. 2.14 схематично представлено розташування складських приміщень підприємства, які утворюють множину $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. На цій множині задати списком і матрицями відношення: R_1 - «*перебувати в одному приміщенні*»; R_2 - «*мати загальну стіну*». Знайти транзитивне замикання відношень R_1^{O} і R_2^{O}.

Рис. 2.14.

33. На множині $A = \{a,b,c,d\}$ визначене відношення R, яке задано матрицею (рис. 2.15,а). Які властивості має відношення R? Записати матрицю транзитивного замикання R^{O}.

34. На множині $A = \{a,b,c,d\}$ визначені відношення R_1 і R_2, які задані матрицями (рис. 2.16, б, в). Які властивості мають

відношення R_1 і R_2. Здійснити операції над відношеннями R_1 і R_2. Які властивості мають отримані відношення?

R	a	b	c	d
a	1	1	1	1
b	0	0	1	1
c	0	1	1	1
d	0	1	0	0

(а)

R_1	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	1	0	1	0
c	0	1	1	0
d	1	0	0	0

(б)

R_2	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	1	0	0	1
c	0	0	0	0
d	0	1	0	0

(в)

Рис. 2.15.

35. Відношення R задане матрицею (рис. 2.16 варіанти а - г). Визначити властивості відношення R. Виконати унарні операції над відношенням R, визначити властивості отриманих відношень.

R	a	b	c
a	1	1	0
b	0	1	0
c	0	1	1

(а)

R	a	b	c
a	0	1	0
b	1	0	0
c	0	0	0

(б)

R	a	b	c
a	1	0	1
b	0	1	0
c	1	0	1

(в)

R	a	b	c
a	0	0	1
b	0	1	0
c	1	0	0

(г)

Рис. 2.16.

36. Відношення R_1 і R_2 задані матрицями (рис. 2.17 варіанти а і б). Визначити властивості цих відношень. Виконати бінарні операції над відношеннями R_1 і R_2. Визначити властивості отриманих відношень.

R_1	a	b	c	d
a	1	1	0	1
b	0	1	0	0
c	1	0	1	0
d	0	1	0	1

R_2	a	b	c	d
a	0	0	0	1
b	1	1	1	1
c	0	0	1	0
d	1	0	0	0

(а)

R_1	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	1	0	1	1
c	0	1	1	0
d	0	0	0	1

R_2	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	0	0	0	1
c	0	1	0	0
d	1	0	1	0

(б)

Рис. 2.17.

2.5. Функції

Визначення 2.17. *Функцією* f називається таке відношення R, ніякі два різних елементи якого не мають однакових перших координат. Тобто f є функцією тоді й тільки тоді, коли вона задовольняє наступним умовам:

- елементами f є упорядковані пари;

- якщо упорядковані пари $\langle a,b\rangle$ і $\langle a,c\rangle$ - елементи функції f, то $b = c$.

Отже, відношення f на $A\times B$ називається функцією з A в B і позначається як $f : A\to B$.

Якщо $f : A\to B$ функція і $\langle a,b\rangle\in f$, то говорять, що $b = f(a)$.

Визначення 2.18. Множина A називається *областю визначення* функції f і позначається $D(f)$, а множина B - *областю потенційних значень*. Якщо $I\subseteq A$, то множина $f(I) = \{b|f(a) = b$ для деякого $a\in I\}$ називається *образом* множини I. Образ усієї множини A називається *областю значень* функції f і позначається $E(f)$.

<u>Приклад 2.18.</u> Які із представлених відношень є функціями:

а) $\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,7\rangle,\langle 4,9\rangle,\langle 2,13\rangle\}$; б) $\{\langle 4,2\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 1,11,\rangle\langle 7,2\rangle\}$;

в) $\{\langle x,x^2\rangle | x\in R\}$; г) $\{\langle x^2,x\rangle | x\in R\}$.

Розв'язання:

а) відношення не є функцією, тому що два елементи $\langle 2,7\rangle$ і $\langle 2,13\rangle$ мають однакову першу координату;

б) відношення є функцією, тому що перший елемент кожної впорядкованої пари зустрічається рівно один раз;

в) відношення є функцією, графіком якої буде парабола;

г) відношення не є функцією, тому що його елементами є впорядковані пари з однаковими першими координатами, наприклад, і $\langle 1,1\rangle$, і $\langle 1,-1\rangle$.

<u>Приклад 2.19.</u> Знайти область визначення і область значень функції:

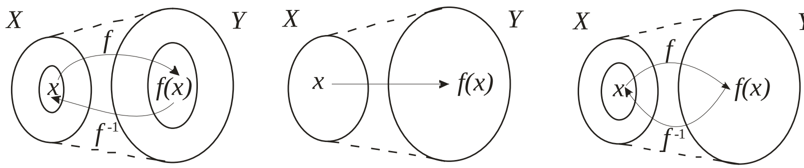
а) $\{\langle 4,2\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 1,11,\rangle\langle 7,2\rangle\}$; б) $\{\langle x,x^2\rangle | x\in R\}$.

Розв'язання:

а) область визначення функції $A=\{1,4,5,7\}$, а область значень - $B=\{2,3,11\}$;

б) область визначення - $x\in R$, а область значень - $y\in R^+$.

<u>Визначення 2.19.</u> Функція $f:A\to B$ називається *ін'єктивною*, або *ін'єкцією*, якщо з $f(a)=f(a')$ прямує $a=a'$ (рис. 2.18,а). Функція $f:A\to B$ називається *«відображенням на..»*, *сюр'єктивною* функцією, або *сюр'єкцією*, якщо для кожного $b\in B$ існує деяке $a\in A$ таке, що $f(a)=b$ (рис. 2.18,б). Функція, що є одночасно і ін'єктивною і сюр'єктивною, називається *бієктивною* або *взаємнооднозначною* (рис. 2.18,в).



(а) (б) (в)

Рис. 2.18.

Можна привести ще одне визначення взаємно-однозначної функції.

Визначення 2.20. Функція $f : A \to B$ називається *взаємнооднозначною,* якщо вона переводить різні елементи в різні. Тобто з умови $a \neq a'$ прямує $f(a) \neq f(a')$.

Якщо R^{-1} - обернене відношення до взаємно-однозначного функціонального відношення R, то R^{-1} визначає функцію f^{-1}, яку називають *оберненою* до функції f.

Ін'єктивна функція f має обернену функцію f^{-1}.

Функція f^{-1}, обернена до бієктивної, є відображенням не на множину X, а в множину X.

Взаємнооднозначність функції зручно доводити виходячи з міркувань:

«з умови $f(x_1) = f(x_2)$ прямує $x_1 = x_2$».

Приклад 2.20. Чи є функція $f(x) = 3x + 5$ взаємно-однозначною?

Розв'язання:

$f(x_1) = 3x_1 + 5$; $f(x_2) = 3x_2 + 5$. З умови $f(x_1) = f(x_2)$ прямує; $3x_1 + 5 = 3x_2 + 5$. Отже $x_1 = x_2$ і функція є взаємноодназначною.

<u>Визначення 2.21.</u> Нехай f - функція із множини A в множину B, тобто $f : A \to B$ $(f \subseteq A \times B)$. *Обернене відношення* $f^{-1} \subseteq B \times A$ визначається як $f^{-1} = \{\langle b, a\rangle | \langle a, b\rangle \in f\}$. При цьому f^{-1} називається *перетворенням* функції f, або її *оберненою функцією*.

<u>Приклад 2.21.</u> Знайти функцію, обернену до даної: $y = 5x - 1$.

Розв'язання: Обертаючи функцію, одержуємо $\{\langle y, x\rangle | y = 5x - 1,\ x, y \in R\}$, але це те ж саме, що і $\{\langle x, y\rangle | x = 5y - 1,\ x, y \in R\}$. Вирішуючи рівняння відносно y, одержуємо $\left\{\langle x, y\rangle \middle| y = \frac{1}{5}(x+1),\ x, y \in R\right\}$.

Тобто, якщо $f = \{\langle x, y\rangle | y = 5x - 1,\ \ x, y \in Z\}$, то $f^{-1} = \left\{\langle x, y\rangle \middle| y = \frac{1}{5}(x+1),\ x, y \in R\right\}$.

Відповіді на питання, чи є представлене відношення функцією і чи є функція взаємнооднозначною, можна легко одержати за допомогою його графічної ілюстрації.

Відповідно до визначення функції, ніякі два різних елементи відношення не можуть мати однакових перших координат. Отже, промінь, спрямований паралельно осі Oy, повинен перетинати графік відношення не більше одного разу. Тому що взаємнооднозначні функції переводять різні елементи в різні, то промінь, спрямований паралельно осі Ox, повинен перетинати графік відношення теж не більше одного разу.

<u>Приклад 2.21.</u> З'ясувати, чи є дані відношення функціями? Якщо так, то чи будуть вони взаємнооднозначні? У випадку позитивної відповіді, знайти обернені функції:

а) $f = \{\langle x, y\rangle | y^2 = -x, \quad x, y \in R\}$;

б) $f = \left\{\langle x, y\rangle \middle| \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad x \in R, y \in R^+\right\}$;

в) $f = \{\langle x, y\rangle | 3x - 2y + 6 = 0, \quad x, y \in R\}$.

Розв’язання:

а) відношення не є функцією, тому що існує два різних елементи, що мають однакові перші координати (див. рис. 2.19, а);

б) відношення є функцією, тому що не існує елементів, що мають однакові перші координати. Дана функція не є взаємнооднозначною, тому що існують елементи, що мають однакові другі координати (див. рис. 2.19, б);

в) відношення є функцією. Дана функція є взаємнооднозначною, тому що переводить різні елементи в різні (див. рис. 2.19, в). Знайдемо функцію, обернену до даної:

$f = \{\langle x, y\rangle | 3x - 2y + 6 = 0, \quad x, y \in R\}$;

$f^{-1} = \{\langle y, x\rangle | 3x - 2y + 6 = 0, \quad x, y \in R\}$;

$f^{-1} = \{\langle y, x\rangle | 3x - 2y + 6 = 0, \quad x, y \in R\}$;

$f^{-1} = \left\{\langle y, x\rangle \middle| y = \frac{2}{3}x - 2; \quad x, y \in R\right\}$.

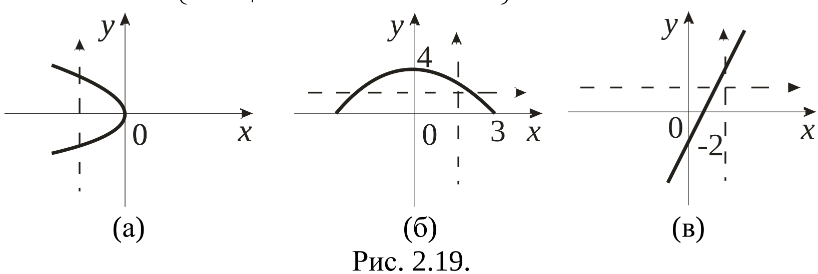


Рис. 2.19.

Визначення 2.22. Нехай дані дві функції $f : X \to Y$ і $g : Y \to Z$, де X, Y, Z - довільні множини. Функція f визначена на X і приймає значення на Y, а функція g визначена на Y і приймає значення на Z. Якщо для кожного $x \in X$ найдеться такий елемент $z \in Z$, що $z = g\left(f\left(x\right)\right)$, то така відповідність між множинами X і Z називається *композицією* або *суперпозицією* функцій g і f і позначається $g \circ f$ (рис. 2.20).

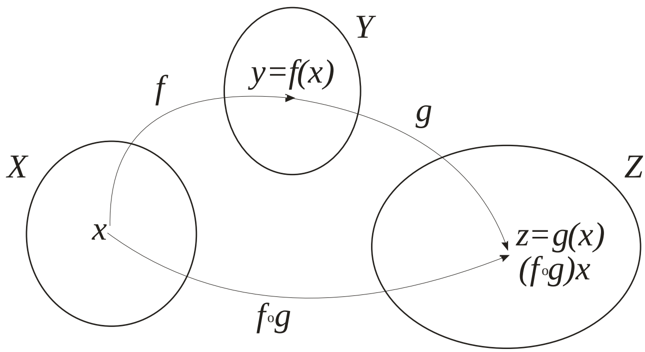


Рис. 2.20.

Приклад 2.22. Функції $f\left(x\right) = x^2$ і $g\left(x\right) = x + 5$ задані на множині дійсних чисел. Знайти композицію функцій $f \circ g$ і $g \circ f$.

Розв'язання:

$f \circ g = f\left(g\left(x\right)\right) = f\left(x+5\right) = \left(x+5\right)^2$;

$g \circ f = g\left(f\left(x\right)\right) = g\left(x^2\right) = x^2 + 5$.

Завдання:

37. Нехай $f \subseteq R \times R$. Знайти області визначення і значень наступних функцій:

а) $f\left(x\right) = x^2 + 9$; б) $f\left(x\right) = \dfrac{1}{x^2 + 9}$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$; г) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-9}}$;

д) $f(x)=\sqrt{x-9}$; е) $f(x)=|x+9|$.

38. З'ясуйте, які з наведених нижче відношень є функціями. Визначте властивості функцій. Для взаємнооднозначних функцій знайдіть обернені:

а) $f=\{\langle x,y\rangle \mid y=5x-1,\quad x,y\in R\}$;

б) $f=\left\{\langle x,y\rangle \left| \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1,\quad x\in R, y\in R^+ \right.\right\}$;

в) $f=\{\langle x,y\rangle \mid x^2+(y-1)^2=9,\quad x,y\in R^+\}$

г) $f=\{\langle x,y\rangle \mid y=\ln x,\quad x\in R^+, y\in R\}$;

д) $f=\left\{\langle x,y\rangle \left| \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}=1,\quad x,y\in R^+ \right.\right\}$;

е) $f=\{\langle x,y\rangle \mid y=e^x,\quad x\in R, y\in R^+\}$;

ж) $f=\{\langle x,y\rangle \mid 4x+5y-20=0,\quad x,y\in R\}$.

39. Знайти композицію функцій $f\circ g$ й $g\circ f$, заданих на множині дійсних чисел:

а) $f(x)=x^3-8$, $g(x)=2x+7$;

б) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$, $g(x)=x-5$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$, $g(x)=4x-6$;

г) $f(x)=e^{5x}$, $g(x)=\cos 3x$;

д) $f(x)=\sin 2x$, $g(x)=x-4$.

Тестове завдання до теми «Відношення»

1. Побудувати матрицю відношення R та з'ясувати його властивості. Відношення задано на множині $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. $R = \{a + b \ \text{ просте число}\}$.

А:

R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
2	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
3	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
4	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
5	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
6	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
7	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
8	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
9	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
10	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0

Не рефлексивне, не антирефлексивне, симетричне, не транзитивне.

Б:

R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
2	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
3	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
4	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
5	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
6	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
7	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
8	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
9	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
10	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Рефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, транзитивне.

В:

R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
2	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0
3	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
4	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0
5	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0
6	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
7	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1
8	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0
9	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
10	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1

Рефлексивне, антисиметричне, не транзитивне.

Г:

R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
2	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
3	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
4	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
5	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1
6	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
7	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
8	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
9	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
10	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0

Рефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, не транзитивне.

2. З’ясувати властивості відношення R, що задано матрицею:

R	a	b	c
a	1	0	0
b	1	0	1
c	0	1	1

Виконати унарні операції.
А: Рефлексивне, симетричне, не транзитивне, не еквівалентне. $R \cup R = 0$; $R - R = R$; $R \cap R = \emptyset$; $\bar{R} = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,a\rangle\}$; $R^{-1} = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle c,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,c\rangle\}$; $R^0 = \{\langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle\}$; $R^* = \{\langle a,a\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$. **Б:** Не рефлексивне, не антирефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, не транзитивне, не еквівалентне. $R \cup R = R$; $R - R = \emptyset$; $R \cap R = R$; $\bar{R} = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,a\rangle\}$; $R^{-1} = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle c,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,c\rangle\}$; $R^0 = \{\langle a,a\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$; $R^* = \{\langle a,a\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$. **В:** Не рефлексивне, антирефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, транзитивне, не еквівалентне. $R \cup R = R$; $R - R = \emptyset$; $R \cap R = \emptyset$; $\bar{R} = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,c\rangle\}$; $R^{-1} = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle c,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,c\rangle\}$; $R^0 = \{\langle a,a\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$; $R^* = \{\langle a,a\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle\}$. **Г:** Не рефлексивне, не антирефлексивне, симетричне, не транзитивне, еквівалентне. $R \cup R = R$; $R - R = \emptyset$; $R \cap R = R$; $\bar{R} = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,a\rangle\}$; $R^{-1} = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle c,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,c\rangle\}$; $R^0 = \{\langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$; $R^* = \{\langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$.

3. На множині задані відношення R_1 і R_2 матрицями. Визначити властивості відношень. Виконати бінарні операції над відношеннями R_1 і R_2.

R_1	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	1	0	0	1

R_2	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	1	0	0
c	0	1	1	0
d	1	1	0	0

А: R_1- рефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, транзитивне, не еквівалентне; R_2 - не рефлексивне, не анти рефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, не транзитивне.

$R_1 \cup R_2 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle,$
$\langle d,a\rangle, \langle d,b\rangle, \langle d,d\rangle\};$

$R_1 \cap R_2 = \{\langle a,d\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,a\rangle\};$

$R_1 - R_2 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,c\rangle, \langle d,d\rangle\};$

$R_1 {}^\circ R_2 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,b\rangle,$
$\langle d,d\rangle\}.$

Б: R_1- не рефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, транзитивне, не еквівалентне; R_2 - не рефлексивне, не анти рефлексивне, не симетричне, антисиметричне, не транзитивне.

$R_1 \cup R_2 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,d\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,b\rangle,$
$\langle d,d\rangle\};$

$R_1 \cap R_2 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,d\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,a\rangle\};$

$R_1 - R_2 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,c\rangle, \langle d,d\rangle\};$

$R_1 {}^\circ R_2 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,b\rangle,$
$\langle d,d\rangle\}.$

В: R_1- не рефлексивне, симетричне, не антисиметричне, не транзитивне, не еквівалентне; R_2 - не рефлексивне, не анти рефлексивне, антисиметричне, не транзитивне.

$R_1 \cup R_2 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,d\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,b\rangle, \langle d,d\rangle\}$;

$R_1 \cap R_2 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,d\rangle, \langle d,a\rangle\}$;

$R_1 - R_2 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle d,d\rangle\}$;

$R_1 \circ R_2 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,b\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,d\rangle\}$.

Г: R_1- не рефлексивне, симетричне, не антисиметричне, транзитивне, еквівалентне; R_2 - не рефлексивне, не анти рефлексивне, не симметрично, не антисиметричне, не транзитивне.

$R_1 \cup R_2 = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,b\rangle, \langle d,d\rangle\}$;

$R_1 \cap R_2 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,d\rangle, \langle d,a\rangle\}$;

$R_1 - R_2 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle d,d\rangle\}$;

$R_1 \circ R_2 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,b\rangle, \langle d,a\rangle\}$.

4. З'ясувати, чи є відношення f функцією: $f = \left\{ \langle x,y\rangle \middle| \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1; \quad x,y \in R^+ \right\}$. Якщо так, то чи буде вона взаємооднозначною? Знайти обернену.

А: Функція, не взаємнооднозначна, оберненої нема.

Б: Не функція.

В: Функція, взаємнооднозначна,

$$f^{-1} = \left\{ \langle x,y\rangle \middle| \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1; x, y, \in R^+ \right\}.$$

Г: Функція, взаємнооднозначна,

$$f^{-1} = \left\{ \langle x,y\rangle \middle| \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1; x, y, \in R^+ \right\}.$$

5. Знайти композицію функцій $f \circ g$ і $g \circ f$, заданих на множині дійсних чисел, якщо $f(x) = 2x^2 + 5$; $g(x) = \log_3(x+1)$.

А: $f \circ g = (\log_3(x+1))^2 + 5$; $g \circ f = \log_3(2x^2 + 3)$.

Б: $f \circ g = 2(\log_3(x+1))^2 + 5$; $g \circ f = \log_3(x^2 + 6)$.

В: $f \circ g = 2(\log_3(x+2))^2 + 1$; $g \circ f = \log_3(2x^2 + 5)$.

Г: $f \circ g = 2(\log_3(x+1))^2 + 5$; $g \circ f = \log_3(2x^2 + 6)$.

Контрольні запитання

1. Що таке упорядкована пара?
2. Дати визначення бінарного відношення.
3. Як знаходити декартов добуток множин?
4. Назвіть способи завдання бінарних відношень.
5. Назвіть властивості бінарних відношень.
6. Наведіть приклади рефлексивних відношень.
7. Наведіть приклади антирефлексивних відношень.
8. Наведіть приклади симетричних відношень.
9. Наведіть приклади антисиметричних відношень.
10. Наведіть приклади транзитивних відношень.
11. Наведіть приклади еквівалентних відношень.
12. Дайте визначення операцій над бінарними відношеннями. Наведіть приклади.
13. Сформулюйте правила побудови матриць відношень.
14. Дайте визначення функції. Що таке ін'єктивна, сюр'єктивна, бі'єктивна функція.
15. Дайте визначення оберненої функції та сформулюйте правило її знаходження.

3. ЛОГІКА ВИСЛОВЛЕНЬ

3.1. Основні визначення

<u>Визначення 3.1.</u> *Висловлення* – це розповідне речення, про яке можна сказати, що воно істинно або хибно. Істинність або хибність, приписувані висловленню, називаються його *істинностним значенням*.

Наприклад, речення «*Сонце – це зірка*», «*Балаклея – обласний центр України*» є висловленнями, причому перше – істинно, а друге – хибно. А речення «*котра година?*», «*вивчите вірш*» не є висловленнями.

У математичних міркуваннях і повсякденній мові часто зустрічаються речення, утворені видозміною деякого речення за допомогою слова *не*, або складені із простих речень за допомогою сполучників: *і, або, якщо … то, тоді і тільки тоді, коли*. Які називаються *сентенційними сполучниками*. На відміну від повсякденної мови, у математичній логіці зміст таких висловлень може бути визначений однозначно.

<u>Визначення 3.2.</u> Висловлення, що не містить сполучників, називається *простим*; висловлення, що містить сполучники, називається *складним*.

Будемо позначати висловлення буквами латинського алфавіту A, B, C, P, Q, R …

Візьмемо наступні прості висловлення:

$A =$ «*я підіймаюся рано*»; $B =$ «*я йду на роботу*».

За допомогою п'яти сентенційних сполучників можна утворити наступні складні висловлення:

- *заперечення* – це речення, видозмінене за допомогою слова *не*; позначається як $\overline{A}$, $\sim A$. Наприклад,

$\overline{A} =$ «*я не підіймаюся рано*»;

- *кон’юнкція* – це речення, яке утворено з’єднанням двох простих речень за допомогою слова *і*; позначається як $A \wedge B$. Наприклад,

$A \wedge B =$ «*я підіймаюсь рано і йду на роботу*»;

- *диз'юнкція* - це речення, яке утворено з'єднанням двох простих речень за допомогою слова *або*; позначається як $A \vee B$. Наприклад,

$A \vee \overline{B} =$ «*я підіймаюсь рано або не йду на роботу*»;

- *імплікація* - це речення, яке утворено з'єднанням двох простих речень за допомогою слів *якщо … то*; позначається як $A \to B$. Наприклад,

$A \to B =$ «*якщо я підіймаюсь рано, то йду на роботу*»;

- *еквівалентність* - це речення, утворене з'єднанням двох простих речень за допомогою слів *тоді і тільки тоді, коли*; позначається як $A \leftrightarrow B$. Наприклад,

$A \leftrightarrow B =$ «*я підіймаюсь рано тоді і тільки тоді, коли йду на роботу*».

<u>Визначення 3.3.</u> Символи $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ називаються *бінарними* з'єднаннями, тому що вони з'єднують два висловлення, а символ ~ - *унарним* з'єднанням, тому що застосовується тільки до одного висловлення.

Є ще одне бінарне з'єднання – що *виключає або* (*нерівнозначність, додавання за модулем 2*). Позначається як $P \oplus Q$, читається як «або P або Q». Висловлення $P \oplus Q$ істинно, коли істинностні значення P і Q не збігаються, і хибно – у протилежному випадку.

<u>Приклад 3.1.</u> Представити логічними формулами наступні висловлення:

1) «Сьогодні не світить сонце»;
2) «Я піду гуляти або залишуся удома»;
3) «Спортсмен здобув перемогу і одержав заслужену нагороду»;
4) «Якщо цех перевиконає план, то робітники одержать премії»;

5) «Родину варто створювати тоді і тільки тоді, коли між молодими людьми є почуття любові і поваги»;
6) «На вулиці ясно або похмуро»;
7) «Якщо парубок зневажає фізичними вправами або годинами сидить за комп'ютером, то це спричиняє погіршення його самопочуття і погану поставу».

Розв'язання:

1) Висловлення «Сьогодні не світить сонце» утворено запереченням висловленню «Сьогодні світить сонце». Останнє позначимо через P, тоді початкове висловлення є складним, представимо його логічною формулою: $\overline{P}$.

2) Складне висловлення «Я піду гуляти або залишуся удома» утворено із двох простих, з'єднаних сполучником «*або*»:

P - «Я піду гуляти»;
Q - «Я залишуся удома».

Отже, маємо логічну формулу $P \vee Q$.

3) Складне висловлення «Спортсмен здобув перемогу і одержав заслужену нагороду» утворено із двох простих, з'єднаних сполучником «*і*»:

P - «Спортсмен здобув перемогу»;
Q - «Спортсмен одержав заслужену нагороду».

Отже, маємо логічну формулу $P \wedge Q$.

4) Складне висловлення «Якщо цех перевиконає план, то робітники одержать премії», утворено із двох простих, з'єднаних логічним сполучником «*якщо … то*»:

P - «Цех перевиконає план»;
Q - «Робітники одержать премії».

Отже, маємо логічну формулу $P \to Q$.

5) Складне висловлення «Родину варто створювати тоді і тільки тоді, коли між молодими людьми є почуття любові і

поваги» утворено із трьох простих, які з’єднані логічним сполучником «*тоді і тільки тоді*» і сполучником «*і*»:

P - «Родину варто створювати»;

Q - «Між молодими людьми є почуття любові»;

R - «Між молодими людьми є почуття поваги».

Отже, маємо логічну формулу $P \to (Q \wedge R)$.

6) Складене висловлення «На вулиці ясно або похмуро» утворено із двох простих:

P - «На вулиці ясно»;

Q - «На вулиці похмуро», з'єднаних сполучником «*або*», очевидно в розділовому змісті, тобто «*що виключає або*» (не може одночасно бути погода ясною і похмурою) - $\oplus$, тому що одночасно на вулиці не може бути і ясно, і похмуро.

Отже, маємо логічну формулу: $P \oplus Q$.

7) Складне висловлення «Якщо парубок зневажає фізичними вправами або годинами сидить за комп'ютером, то це спричиняє погіршення його самопочуття і погану поставу» розіб'ємо на прості:

P - «Парубок зневажає фізичними вправами»;

Q - «Парубок годинами сидить за комп'ютером»;

R - «Виникає погіршення самопочуття»;

S - «Виникає погана постава».

Логічна формула, що описує дане висловлення, буде мати вигляд: $(P \vee Q) \to (R \wedge S)$.

Прості висловлення можуть бути істинними або хибними незалежно друг від друга, але вони визначають значення складного висловлення.

Таблиці істинності для розглянутих вище логічних формул дозволяють легко визначити значення складного висловлення (табл. 3.1):

Таблиця 3.1.

Заперечення	
P	$\overline{P}$
1	0
0	1

		Кон'юнкція	Диз'юнкція	Імплікація	Еквіваленція
P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1

Висловлення $\overline{P}$ істинно, коли висловлення P - хибно, і хибно – у протилежному випадку. Наприклад, якщо P - «сьогодні холодно», то $\overline{P}$ - «сьогодні не холодно».

Висловлення $P \wedge Q$ істинно, коли обидва висловлення істинні, і хибно – у всіх інших випадках. Прикладом кон'юнкції може бути відповідь на питання: «При яких умовах учень, що закінчує школу, може стати студентом?». Якщо прийняти за P - «одержати атестат зрілості», а за Q - «пройти незалежне тестування», то учень стане студентом, коли одержить атестат зрілості і пройде незалежне тестування $(P=1,\ Q=1,\ P \wedge Q=1)$.

Висловлення $P \vee Q$ хибно у випадку, коли обидва з простих висловлень хибні, і істинно - у всіх інших випадках. Як приклад розглянемо наступні висловлення: P - «на вулиці йде дощ», Q - «хтось забув виключити душ». Тоді $P \vee Q$ - «я чую шум, видаваний водою». Це можливо, якщо на вулиці йде дощ, або якщо хтось забув виключити душ, або при виконанні двох цих умов.

Висловлення $P \to Q$ хибно, якщо P - істинно, а Q - хибно; і істинно у всіх інших випадках. Висловлення «якщо … то» носити пояснюючий характер. Пояснюючий характер імплікації пов'язаний із причинно-наслідковим відношенням, при якому P виступає в ролі заподії (посилки імплікації), а Q -

наслідку (висновку). Якщо P - «на вулиці йде дощ», а Q - «над моєю головою розкрита парасолька», тоді $P \to Q$ -«я залишуся сухим» буде помилковим тільки в тому випадку, якщо на вулиці йде дощ, а парасолька не розкрита $(P=1,\ Q=0,\ P \to Q=0)$.

Висловлення $P \leftrightarrow Q$ істинно, коли значення P і Q збігаються, і хибно – у протилежному випадку. Тому що еквівалентність виражається через кон'юнкцію двох імплікацій $P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \wedge (Q \to P)$, то це відношення виникає при одночасному виконанні двох умов: «із P прямує Q» і «із Q прямує P». Наприклад, привласнимо висловленням P і Q значення 1, якщо P і Q означають «дочка», і 0, якщо P і Q означають «син». Тоді складне висловлення $P \leftrightarrow Q$ - «у родині одностатеві діти» істинно тоді і тільки тоді, коли або $P=Q=1$, або $P=Q=0$.

При запису складних висловлень у символічній формі часто виникає необхідність у використанні великої кількості дужок. Щоб усунути цю незручність вводять деякі угоди. Умовимося, що $\leftrightarrow$ є найсильніше сполучення (тобто вона має найбільшу область дії), а за нею йде $\to$. Далі – рівні по силі $\vee$ і $\wedge$, а потім ~ - найслабше сполучення. Необхідно пам'ятати, що спочатку виконуються більш слабкі сполучення, а потім - більш сильні.

Якщо істинностні значення простих компонентів відомі, то істинностне значення складного висловлення може бути визначене з використанням таблиць істинності.

<u>Приклад 3.2.</u> Визначити істинностне значення висловлення $A \vee B \to C \leftrightarrow A \wedge \sim B \to C$, якщо A і B - істинні $(A=1,\ B=1)$, а C - хибно $(C=0)$.

Розв'язання: Визначення істинностного значення висловлення можна зробити швидко, якщо написати під кожним простим висловленням його істинностне значення, а істинностне значення кожного складного висловлення – під відповідним сполученням. Для зручності читання послідовні кроки можуть бути записані один під іншим:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
A & \vee & B & \to & C & \leftrightarrow & A & \wedge & \sim & B & \to & C \\
1 & & 1 & & 0 & & 1 & & & 1 & & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & & \\
 & 1 & & & & & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

Звідси можемо зробити висновок: дане висловлення хибно.

Складне висловлення може приймати як істинне, так і хибне значення залежно від значень, приписуваним простим компонентам. Для того щоб однозначно вказати ті ситуації, коли складне висловлення є істинним, необхідно врахувати всі можливості. Із цією метою ми будемо будувати таблиці істинності складних висловлень, використовуючи таблиці істинності простих компонентів. Приведемо два еквівалентних способи побудови таблиці істинності складного висловлення. Перший полягає в тому, що складне висловлення ми розбиваємо на прості, і встановлюємо істинне значення кожного сполучення. А при другому способі ми записуємо істинностні значення під кожним сполученням. Проілюструємо обидва підходи на прикладі.

Приклад 3.3. Побудувати таблицю істинності висловлення $(\sim A \to B)\wedge C$.

Розв'язання: Побудуємо таблицю істинності двома способами:

- перший спосіб: розіб'ємо формулу на складові частини і обчислимо кожну дію окремо (у відповідному стовпці)

A	B	C	$\sim A$	$\sim A \to B$	$(\sim A \to B) \wedge C$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0

- другий спосіб: обчислимо формулу на кожному можливому наборі простих висловлень

A	B	C	$(\sim A \to B) \wedge C$
1	1	1	0 1 1
1	1	0	0 1 0
1	0	1	0 1 1
1	0	0	0 1 0
0	1	1	1 1 1
0	1	0	1 1 0
0	0	1	1 0 0
0	0	0	1 0 0

На наш погляд, перший спосіб більш зручний, але пропонуємо читачеві свій метод обирати самостійно. Як бачимо, на результат наш вибір не впливає.

Необхідно відзначити важливість розходження між *мовою і метамовою*, між *об'єктними* і *суб'єктними* висловленнями. Якщо зневажати цими розходженнями, то можна прийти до протиріччя, називаному *логічним парадоксом*. Приведемо приклад відомого парадокса. Англійський логік Бертран Рассел розглянув таку притчу: «*В одному селі жив перукар. Він голив всіх тих жителів села, хто не голився сам*». Рассел задався питанням: чи може перукар поголити самого себе? Його міркування наступні: якщо перукар захоче поголити себе самого, то як житель цього села, що голиться сам, не вправі цього зробити; але якщо перукар не стане голитися, то вже як житель села, що не голиться сам, він буде зобов'язаний себе поголити.

Викладемо зміст цього протиріччя формальною мовою. Позначимо A - перукаря, а B - жителя села. Нехай висловлення $P(A,B)$ означає «A голить B». Тоді ситуація в селищі може бути описана двома метависловлюваннями:

1) якщо $P(B,B)=0$, то $P(A,B)=1$;
2) якщо $P(B,B)=1$, то $P(A,B)=0$.

Коли перукар розглядається як рядовий житель села $(A=B)$, то обидва метависловлювання стають внутрішньо суперечливими:

1) якщо $P(A,A)=0$, то $P(A,A)=1$;
2) якщо $P(A,A)=1$, то $P(A,A)=0$.

Звідси ми можемо зробити висновок, що незважаючи на те, що A, як і B, є об'єктною змінною, її не можна ставити на один рівень із B, тому що саме відносно A були сформульовані всі метависловлювання. Як висловлення $P(A,B)$ можна розглядати будь-які з відомих нам ситуацій: «A вчить B»; «A співає для B»; …, при цьому під A розуміємо вчителя, артиста, і т.п.

Завдання:

1. Які з наступних речень є висловленнями? Укажіть їх істинностне значення:
   а) Сьогодні - вівторок.
   б) На вулиці мороз.
   в) Як пройти до бібліотеки?
   г) Все наше життя - гра!
   д) У тайзі субтропічний клімат.
   е) А чи не піти нам у ліс?
   ж) Гамлет – принц датський
   з) Як поживаєш?

2. Нехай A, B і C позначають наступні висловлення:
   A - «Я поїду влітку до Криму»;
   B - «Я хочу поїхати до Криму»;
   C - «У мене є гроші».

Записати в символьній формі наступні висловлення:

а) «Я хочу поїхати до Криму і я поїду влітку до Криму»;

б) «У мене немає грошей, тому я не поїду влітку до Криму»;

в) «У мене є гроші, але я не хочу їхати до Криму, і я не поїду влітку до Криму»;

г) «Я поїду влітку до Криму лише тоді, коли у мене будуть гроші і бажання на те».

3. Нехай A, B і C позначають наступні висловлення:

A - «Я вчуся за контрактом»;

B - «Я здам сесію вчасно»;

C - «Я одержу стипендію».

Записати в символьній формі наступні висловлення:

а) «Я не здам сесію вчасно»;

б) «Якщо я вчуся за контрактом, то не одержую стипендію»;

в) «Якщо я не вчуся за контрактом і здам сесію вчасно, то одержу стипендію»;

г) «Якщо я не вчуся за контрактом і не одержую стипендії, то сесію я здав не вчасно»;

д) «Я зможу одержувати стипендію лише в тому випадку, коли здаватиме сесію вчасно і вчитимуся не за контрактом».

4. Нехай A, B, C, D і E позначають наступні висловлення:

A - «Я живу в маленькому місті»;

B - «У нашому місті є театр»;

C - «Я люблю театр»;

D - «У мене є вільний час»,

E - «Я можу ходити в театр щодня».

Записати в символьній формі наступні висловлення:

а) «У мене немає вільного часу, тому я не можу ходити в театр щодня»;

б) «Я живу в маленькому місті, і в ньому немає театру, тому я не можу ходити в театр щодня»;

в) «Я не люблю театр або у мене немає вільного часу, тому я не можу ходити в театр щодня»;

г) «У нашому місті є театр, я люблю театр і можу ходити в театр щодня»;

д) «Я можу ходити в театр щодня лише тому, що у нашому місті є театр, я його люблю і у мене достатньо вільного часу на це».

5. Нехай A, B і C позначають наступні висловлення:
   A - «Я працюю в солідній фірмі»;
   B - «Я одержую високу зарплату»;
   C - «Я займаю високу посаду».

   Інтерпретуйте наступні висловлення як звичайні речення:
   а) $A \wedge B$; б) $B \to (A \vee C)$;
   в) $(A \wedge \sim B) \to \sim C$; г) $(A \wedge C) \leftrightarrow B$.

6. Нехай A, B і C позначають наступні висловлення:
   A - «Я люблю грати в комп'ютерні ігри»;
   B - «В мене є комп'ютер»;
   C - «В мене є час для ігор».

   Інтерпретуйте наступні висловлення як звичайні речення:
   а) $A \wedge \sim B$; б) $C \to A$;
   в) $\sim C \wedge A \wedge B$; г) $B \wedge (\sim A \vee \sim C)$.

7. Побудуйте таблиці істинності для висловлень у вправах 2 - 6.
8. Запишіть у символьній формі наступні складні висловлення:

а) «Якщо конкуренція серед виробників товарів народного споживання висока, то для залучення потенційних покупців фірмі-виробникові необхідно: підвищувати якість товару; грамотно вирішувати питання цінової політики; проводити акції»;

б) «Для того щоб стати заможним, парубок може виграти велику суму коштів в казино або одержати роботу з високим заробітком. Якщо парубок задумає розбагатіти, граючи в казино, він ризикує програти все і стати жебраком. Якщо парубок вирішив зробити кар'єру, то йому необхідно одержати гарну освіту, багато працювати над собою, добре зарекомендувати себе. Робота з високою заробітною платнею - шлях до заможного життя»;

в) «Я хочу зробити подарунок Антону: комп'ютерні диски або квитки в кіно. Якщо я подарую Антону диски з новими комп'ютерними іграми, то Антон буде грати на комп'ютері всю ніч. Якщо Антон буде грати на комп'ютері всю ніч, він сильно втомиться, і я не зможу його побачити завтра. Я зможу завтра побачити Антона, тільки якщо подарую йому квитки в кіно.»

9. Знайти істинностне значення кожного з наступних висловлень:
   а) $P \to (Q \vee \sim R \leftrightarrow P \wedge R)$, якщо $P=1$, $Q=1$, $R=0$;
   б) $(\sim Q \wedge \sim R \leftrightarrow P) \vee Q$, якщо $P=0$, $Q=1$, $R=0$;
   в) $P \wedge R \to \sim ((Q \vee \sim P) \leftrightarrow (Q \vee R))$, якщо $P=1$, $Q=1$, $R=1$;
   г) $Q \to (R \to \sim P \vee R \leftrightarrow Q)$, якщо $P=0$, $Q=1$, $R=1$;
   д) $(\sim Q \vee \sim R \to Q) \wedge P \leftrightarrow (R \wedge P)$, якщо $P=0$, $Q=0$, $R=0$.

10. Скласти таблицю істинності для кожного з наступних висловлень:
   а) $(R \to P) \vee \sim R \to Q \wedge P$;
   б) $R \leftrightarrow \sim Q \to (P \vee (Q \wedge \sim R))$;
   в) $Q \vee P \to \sim (Q \wedge P) \leftrightarrow R$;
   г) $P \to (P \to (Q \leftrightarrow \sim (R \vee P)))$;
   д) $(Q \vee \sim R) \to (P \wedge Q \leftrightarrow \sim R)$.

3.2. Істинностна функція

Обчислення висловлень призначене для аналізу логічних зв'язків між реченнями, які залежать тільки від побудови нових речень з вихідних за допомогою уже відомих нам сентенційних сполучників. Для такого аналізу необхідна наявність вихідної непустої множини простих речень і виконання наступних допущень:

а) кожне просте речення є висловленням, тобто кожному простому реченню можна поставити у відповідність його істинностне значення;

б) кожне з висловлень, що аналізуємо, складається із простих висловлень багаторазовим використанням сентенційних сполучників і приймає істинностне значення, випливаючи з наведених раніше таблиць істинності для сентенційних сполучень, відповідно до істинностних значень простих речень-висловлень.

Отже, нехай нам дана непуста множина простих висловлень A, B ,… Розширимо цю множину, приєднавши до неї всі ті висловлення, які можна утворити із простих, багаторазово і усілякими способами використовуючи різні сентенційні сполучники. Тобто, елементами розширеної множини будуть: $\sim A$; $A \vee B$; $B \to (\sim B \wedge A)$; $A \leftrightarrow (B \wedge A) \vee \sim A$;… Елементи цієї множини називають *формулами,* причому елементи вихідної множини – *простими формулами* (або *компонентами*), а інші – *складними формулами*.

Кожній простій формулі ставиться у відповідність один елемент із множини $\{1,0\}$. Істинностне значення складної формули визначається у відповідності із таблицями істинності для заперечення, диз'юнкції, кон'юнкції, імплікації і еквівалентності.

Якщо простими компонентами формули A служать $p_1, p_2, \dots, p_n$ то для визначення істинностного значення формули A по істинностним значенням простих компонентів $p_1, p_2, \dots, p_n$ необхідно побудувати таблицю істинності, що складає з 2^n рядків.

<u>Визначення 3.4.</u> Істинностна функція – це функцій від n аргументів, кожний з яких може приймати значення 1 або 0, і сама функція може приймати значення 1 або 0.

Позначати істинностні функції будемо як $f(p_1, p_2, \dots, p_n)$, $g(q_1, q_2, \dots, q_n)$ і т.д.

Під істинностними функціями будемо розуміти елементи множини ϑ, що володіє наступними властивостями:

а) кожна з функцій $\sim p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ - елемент множини ϑ;

б) якщо функція f - елемент множини ϑ, то елементом множини ϑ буде і функція, отримана підстановкою f в якості змінної в кожну з функцій, перерахованих вище.

Як приклади можна привести наступні істинностні функції: $(p \rightarrow q) \vee \sim q$, $p \leftrightarrow p \wedge (q \rightarrow \sim p)$, …

3.3. Еквівалентні висловлення. Тавтології

Особливий інтерес у обчисленні висловлень представляють складні висловлення, що мають різну побудову, але приймають істинне значення в тих же самих випадках, тобто вони мають однакові таблиці істинності. Такі висловлення називають ***логічно еквівалентними***. Наприклад, нехай P - «на вулиці холодно», Q - «я легко одягнений». Розглянемо висловлення – «невірно, що на вулиці холодно і я легко одягнений» - $\sim(P \wedge Q)$ і висловлення – «на вулиці не холодно або я не легко одягнений» - $\sim P \vee \sim Q$. Побудуємо таблиці істинності:

P	Q	$\sim(P \wedge Q)$	$\sim P \vee \sim Q$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1

У всіх чотирьох рядках істинностні значення складних формул збігаються, отже, два розглянутих висловлення – логічно еквівалентні.

Логічно еквівалентні висловлення A і B позначають як A ***eq*** B.

З умовним висловленням – імплікацією $(A \to B)$ зв'язані ще три типи висловлень: *конверсія, інверсія* і *контрапозиція.* Визначаються вони в такий спосіб:

$A \to B$ - імплікація;
$B \to A$ - конверсія висловлення $A \to B$;
$\sim A \to \sim B$ - інверсія висловлення $A \to B$;
$\sim B \to \sim A$ - контрапозиція висловлення $A \to B$.

Приклад 3.4. Нехай дано висловлення-імплікація «Якщо він споживає вітаміни, то він здоровий», тоді:

«Якщо він здоровий, то він споживає вітаміни»
- конверсія;
«Якщо він не споживає вітаміни, то він не здоровий»
- інверсія;
«Якщо він не здоровий, то він не споживає вітаміни»
- контрапозиція.

При побудові висловлення-імплікації і пов'язаних з ним конверсії, інверсії і контрапозиції важливий не порядок слів у висловленні, а те, яка частина висловлення є частиною «якщо», а яка - частиною «то».

Закон контрапозиції говорить, що імплікація і його контрапозиція ***логічно еквівалентні***, у чому можна легко переконатися, зрівнявши їхні таблиці істинності (табл. 3.2). Еквівалентність і контрапозиція умовних висловлень мають у математиці велике значення, тому що найчастіше набагато простіше довести теорему від оберненого, чим дати її прямий доказ. Неважко також показати, що конверсія і інверсії імплікації також мають однакові таблиці істинності, а, отже, - еквівалентні. У той же час імплікація (або її контрапозиція) і конверсія (або інверсія) мають різні таблиці істинності. Нерозуміння цього факту приводить до побудови помилкових логічних міркувань.

Таблиця 3.2.

A	B	$A \to B$
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

A	B	$\sim B$	$\sim A$	$\sim B \to \sim A$
0	0	1	1	**1**
0	1	0	1	**1**
1	0	1	0	**0**
1	1	0	0	**1**

A	B	$B \to A$
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**1**
1	1	**1**

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$\sim A \to \sim B$
0	0	1	1	**1**
0	1	1	0	**0**
1	0	0	1	**0**
1	1	0	0	**1**

Визначення 3.5. Висловлення, істинне при всіх розподілах простих компонентів, називається ***логічно істинним, загальнозначущим*** або ***тавтологією.*** Висловлення, хибне при всіх розподілах простих компонентів, називається ***логічно хибним*** або ***протиріччям***.

Добре нам відомим прикладом тавтології є аксіоми і теореми в математиці, тому що вони істинні завжди.

Маючи логічно істинне висловлення – тавтологію, легко побудувати логічно хибне висловлення – протиріччя. Для цього досить взяти заперечення тавтології. Якщо A - тавтологія, то $\sim A$ - протиріччя.

Для того щоб вирішити питання про те, чи є дана формула A тавтологією, необхідно розглянути її таблицю істинності. Формула A є тавтологією тоді і лише тоді, коли її істинностне значення є 1 при кожному із 2^n приписаних простим компонентам, що входять у формулу A, значенням 1 або 0.

<u>Приклад 3.5.</u> Чи є висловлення $A \wedge (A \to B) \to B$ тавтологією?

Розв’язання: Розглянемо таблицю істинності даного висловлення:

A	B	$A \wedge (A \to B) \to B$		
1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	**1**
0	1	0	1	**1**
0	0	0	1	**1**

Як прямує з таблиці істинності, при кожному з $2^2 = 4$ розподілі значень простих компонентів, формула, що описує дане висловлення, приймає значення 1. Отже, дане висловлення є тавтологією.

Незважаючи на те, що метод встановлення загальної значимості формул за допомогою дослідження їхніх таблиць істинності громіздкий і стомлюючий, він завжди дає відповідь на поставлене питання.

Нижче представимо список деяких тавтологій. Їх запам'ятовувати немає необхідності, цей список буде використовуватися нами як довідковий матеріал. Для самостійної роботи студентам може бути запропоновано перевірити представлені тавтології шляхом побудови їх таблиць істинності.

***Тавтологічні імплікації*:**

1. $A \wedge (A \to B) \to B$;
2. $\sim B \wedge (A \to B) \to \sim A$;
3. $\sim A \wedge (A \vee B) \to B$;
4. $A \to (B \to A \wedge B)$;
5. $A \wedge B \to A$;
6. $A \to A \vee B$;

7. $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$;
8. $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$;
9. $(A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$;
10. $(A \to B \wedge \sim B) \to \sim A$;
11. $(A \to B) \to (A \vee C \to B \vee C)$;
12. $(A \to B) \to (A \wedge C \to B \wedge C)$;
13. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$;
14. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \to (A \leftrightarrow C)$.

Тавтологічні еквіваленції:

15. $A \leftrightarrow A$;
16. $\sim\sim A \leftrightarrow A$;
17. $(A \to B) \wedge (C \to B) \leftrightarrow (A \vee C \to B)$;
18. $(A \to B) \wedge (A \to C) \leftrightarrow (A \to B \wedge C)$;
19. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$;
20. $(A \to B) \leftrightarrow (\sim B \to \sim A)$;
21. $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$;
21a. $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$;
22. $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$;
22a. $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$;
23. $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
23a. $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
24. $A \vee A \leftrightarrow A$;
24a. $A \wedge A \leftrightarrow A$;
25. $\sim (A \vee B) \leftrightarrow \sim A \wedge \sim B$;
25a. $\sim (A \wedge B) \leftrightarrow \sim A \vee \sim B$;

Тавтології для виключення зв'язувань:

26. $A \to B \leftrightarrow \sim A \vee B$;
27. $A \to B \leftrightarrow \sim (A \wedge \sim B)$;
28. $A \vee B \leftrightarrow \sim A \to B$;
29. $A \vee B \leftrightarrow \sim (\sim A \wedge \sim B)$;
30. $A \wedge B \leftrightarrow \sim (A \to \sim B)$;
31. $A \wedge B \leftrightarrow \sim (\sim A \vee \sim B)$;
32. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$.

Замість обчислення істинностного значення формули за таблицями істинності, можна вдатися до простих арифметичних процедур. Для цього приймають деякі угоди, а саме:

1. Формула інтерпретується як істинностна функція, де кожен простий компонент розглядається як змінна, котрої можна приписати значення 1 або 0.

2. Суми і добутки доданків і співмножників 1 і 0, що входять у формули, обчислюються як у звичайній арифметиці, за винятком 1+1=0.

Легко перевірити (за допомогою таблиць істинності), що *основні істинностні функції* задаються наступними формулами:

$$\sim P = 1 + P\,;$$

$$P \wedge Q = P + Q + PQ\,;$$

$$P \vee Q = PQ\,;$$

$$P \to Q = (1 + P)Q\,;$$

$$P \leftrightarrow Q = P + Q\,.$$

У цих термінах тавтологіями є ті істинностні функції, які тотожно дорівнюють нулю.

<u>Приклад 3.6.</u> Довести, що формула $A \to (B \to A \wedge B)$ є тавтологією, не використовуючи таблицю істинності.

Розв'язання: Виконаємо ряд перетворень:

$A \wedge B = A + B + AB$;

$B \to A \wedge B = (1 + B)(A + B + AB) = (1 + B)A + (1 + B)B + (1 + B)AB$,

тому що $(1 + B)B = 0$, то другий і третій доданки дорівнюють нулю, отже, $B \to A \wedge B = (1 + B)A$.

Далі, $A \to (B \to A \wedge B) = (1 + A)(1 + B)A = (1 + A)A(1 + B) = 0$, тому що $(1 + A)A = 0$.

Отже, дана формула є тавтологією.

Помітимо, що в даній алгебрі $2A$ і $(1 + A)A$ тотожно дорівнюють нулю, що істотно полегшує спрощення довгих виразів.

Завдання:

11. Для даного висловлення сформулюйте конверсію, інверсію і контрапозицію:

а) «Якщо мені вдасться укласти вигідну угоду, то фірма виплатить мені премію»;

б) «Якщо парубок одержав паспорт, то він повнолітній»;

в) «Якщо я не буду працювати, то мені нема чого буде їсти»;

г) «Якщо я не здам сесію, то мене відрахують із інституту»;

д) «Якщо ти маєш гарну освіту, то в тебе великі шанси зробити блискучу кар'єру».

12. Перевірити, чи є наступні висловлення еквівалентними:

а) $\sim(P \leftrightarrow Q)$ і $(P \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge \sim P)$;

б) $P \to Q$ і $\sim P \vee Q$;

в) P і $\sim(P \wedge Q) \to (\sim Q \wedge P)$;

г) P і $P \wedge (Q \vee \sim Q)$;

д) $P \to Q$ і $Q \to P$?

13. Перевірити тавтологічні імплікації:

а) використовуючи таблиці істинності;

б) не використовуючи таблиці істинності.

14. Перевірити тавтологічні еквіваленції:

а) використовуючи таблиці істинності;

б) не використовуючи таблиці істинності.

15. Перевірити тавтології для виключення сполучень:

а) використовуючи таблиці істинності;

б) не використовуючи таблиці істинності.

3.4. Основні схеми побудови логічно правильних міркувань. Логічний наслідок

При вивченні математики ми найчастіше зустрічаємося з теоремами та їхніми доказами. При цьому теореми являють собою істинні твердження. У математичних системах вся необхідна інформація повинна утримуватися в аксіомах і раніше доведених теоремах. Розвиваючи конкретний розділ знань, можна не включати в його розгляд всі аксіоми і раніше доведені теореми. Замість цього доведені теореми можна прийняти за аксіоми. Важливо, що логічні правила, які використають для висновку нових теорем з аксіом і раніше доведених теорем, не породжують як теореми хибні висловлення. Ці логічні правила називаються ***правилами висновку*** або ***схемами логічно правильних міркувань***.

<u>Визначення 3.6.</u> Одержання нових знань із уже наявних, виражених у формі висловлення, називається ***умовивід*** або ***міркування***. При цьому вихідні висловлення, твердження називаються ***гіпотезами*** або ***засновками***, а одержувані – ***висновком*** або ***логічним наслідком***.

<u>Визначення 3.7.</u> Правильним умовиводом називається таке міркування, висновок (логічний наслідок) якого є істинний щораз, коли істинні його гіпотези.

Умовивід звичайно представляють у вигляді

$$H_1,\ H_2,\ H_3,\ \ldots \Big| \therefore C\ .$$

Тут: $H_1,\ H_2,\ H_3,\ \ldots$ - гіпотези, C - висновок, а символ «$\therefore$» означає «отже».

Правильність (або істинність) побудованого умовиводу можна перевірити двома способами, а саме:

- за допомогою таблиці істинності можна показати, що висновок істинний щораз, коли істинні гіпотези;

- за допомогою логічних правил можна довести істинність висновку.

При перевірці правильності міркувань за допомогою таблиць істинності, варто звернути увагу, що міркування з посилками $H_1, H_2, \ldots, H_n$ висновком C істинно тоді й тільки тоді, коли висловлення

$$\left(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n\right) \to C$$

є тавтологія, при цьому порядок проходження посилок не важливий.

Існує і інший підхід до перевірки логічності складного міркування за допомогою таблиці істинності. Необхідно пам'ятати, що умовивід є істинним, якщо одиниці наслідку C накривають всі одиниці узагальненої посилки H, що є кон'юнкцією всіх гіпотез $H_1, H_2, ..., H_n$.

Перелічимо деякі, найпоширеніші ***правила висновку*** (***схеми логічно правильних міркувань***):

1. ***Правило відділення (Modus Ponens)***:

$$\begin{array}{l} A \to B \\ \underline{A \qquad\quad} \\ \therefore B \end{array}$$

«Якщо з висловлення A прямує висловлення B і висловлення A істинно, то істинно і B».

2. ***Правило заперечення (Modus Tollens)***:

$$\begin{array}{l} A \to B \\ \underline{\sim B \qquad\ } \\ \therefore \sim A \end{array}$$

«Якщо із A прямує B, але висловлення B - хибне, то хибне і A”».

3. ***Правила стверджения-заперечення (Modus Ponendo-Tollens)***:

$$\begin{array}{l} A \oplus B \\ \underline{A \qquad\ \ } \\ \therefore \sim B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} A \oplus B \\ \underline{B \qquad\ \ } \\ \therefore \sim A \end{array}$$

«Якщо істинно або висловлення A, або висловлення B (у розділовому змісті) і істинне одне з них, то інше – хибне».

4. ***Правила заперечення-ствердження (Modus Tollen-Ponens)***:

а)
$$\frac{A \oplus B \quad \sim A}{\therefore B} \qquad \frac{A \oplus B \quad \sim B}{\therefore A}$$

«Якщо істинне або висловлення A, або висловлення B (у розділовому змісті) і хибне одне з них, те істинне інше»;

б)
$$\frac{A \vee B \quad \sim A}{\therefore B} \qquad \frac{A \vee B \quad \sim B}{\therefore A}$$

«Якщо істинне висловлення A, або висловлення B (у нерозділовому змісті) і хибне одне з них, то істинне інше».

5. ***Правило силогізму (правило транзитивності)***:

$$\frac{A \to B \quad B \to C}{\therefore A \to C}$$

«Якщо із A прямує B, а із B прямує C, то із A прямує C».

6. ***Правило розширення***:

$$\frac{A}{\therefore A \vee B}$$

«Якщо A істинне, то істинне A або B».

7. ***Правило спеціалізації***:

$$\frac{A \wedge B}{\therefore A} \qquad \frac{A \wedge B}{\therefore B}$$

«Якщо істинна кон’юнкція A і B, то істинне кожне з висловлень».

8. ***Правило кон’юнкції***:

$$\frac{A \quad B}{\therefore A \wedge B}$$

«Якщо істинні і A, і B, то істинна і їх кон'юнкція».

9. ***Закон протиріччя:***

$$\begin{array}{c} A \to B \\ A \to \sim B \\ \hline \therefore \sim A \end{array}$$

«Якщо із A прямує B і $\sim B$, то A - хибне».

10. ***Правило контрапозиції***:

$$\begin{array}{l} A \to B \\ \hline \therefore \sim B \to \sim A \end{array}$$

«Якщо із A прямує B, то з того, що хибне B, прямує, що хибне A».

11. ***Правило складної контрапозиції***:

$$\begin{array}{c} (A \wedge B) \to C \\ \hline \therefore (A \wedge \sim C) \to \sim B \end{array}$$

«Якщо з A і B прямує C, то з A і $\sim C$ прямує $\sim B$».

Приведемо ще кілька правил умовиводів без пояснень.

12. ***Правило перетину***:

$$\begin{array}{c} A \to B \\ (B \wedge C) \to D \\ \hline \therefore (A \wedge C) \to D \end{array}$$

13. ***Правило вибору***:

$$\begin{array}{l} A \\ A \to (B \vee C) \\ B \to D \\ C \to D \\ \hline \therefore D \end{array}$$

14. ***Правило, що виключає вибір***:

$$\frac{\begin{array}{l} A \vee B \\ A \rightarrow (C \wedge \sim C) \end{array}}{\therefore B}$$

15. ***Правило імпортації (об'єднання посилок)***:

$$\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{\therefore (A \wedge B) \rightarrow C}$$

16. ***Правило експортації (роз'єднання посилок)***:

$$\frac{(A \wedge B) \rightarrow C}{\therefore A \rightarrow (B \rightarrow C)}$$

17. ***Правило зведення до абсурду***:

$$\frac{\sim A \rightarrow (B \wedge \sim B)}{\therefore A}$$

18. ***Правила дилем***:

а)
$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow C \\ B \rightarrow C \\ A \vee B \end{array}}{\therefore C}$$

б)
$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \rightarrow C \\ \sim B \vee \sim C \end{array}}{\therefore \sim A}$$

в)
$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \\ A \vee C \end{array}}{\therefore B \vee D}$$

г)
$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \\ \sim B \vee \sim D \end{array}}{\therefore \sim A \vee \sim C}$$

Для того, щоб перевірити, чи є представлене міркування правильним, необхідно відновити схему міркувань і з'ясувати, чи належить він до схем логічно правильних міркувань. Варто помітити, що така перевірка ускладнюється тим, що схем логічно правильних міркувань нескінченно багато (ми привели лише найпоширеніші). Тому для перевірки правильності міркувань може бути використаний метод ***доказу від протилежного*** (правила 9, 17). Він полягає в наступному: допускаємо, що істинним є заперечення нашого висновку при істинності всіх гіпотез; потім намагаємося прийти до протиріччя. Якщо це вдається, то наш висновок - істинний, якщо ні - хибний.

Наведемо приклади перевірки правильності умовиводів.

<u>Приклад 3.7.</u> Встановити правильність умовиводу: «Якби не було дощу, ми б сходили в ліс, і назбирали б багато грибів. Дощу не було, і ми сходили в ліс. Отже, у нас багато грибів».

Розв'язання: Позначимо: A - «немає дощу»; B - «сходили в ліс»; C - «у нас багато грибів». Тоді умовивід приймає вид:

$$\begin{array}{l} A \to (B \wedge C) \\ \underline{A \wedge B} \\ \therefore C \end{array}$$

Скористаємося таблицею істинності і перевіримо, чи буде висловлення $((A \to (B \wedge C)) \wedge (A \wedge B)) \to C$ тавтологією.

A	B	C	$((A \to (B \wedge C)) \wedge (A \wedge B)) \to C$				
1	1	1	1	1	1	1	**1**
1	1	0	0	0	0	1	**1**
1	0	1	0	0	0	0	**1**
1	0	0	0	0	0	0	**1**
0	1	1	1	1	0	0	**1**
0	1	0	1	0	0	0	**1**
0	0	1	1	0	0	0	**1**
0	0	0	1	0	0	0	**1**

Як прямує з таблиці, дане висловлення є тавтологією, тобто умовивід - правильний.

<u>Приклад 3.8.</u> Установити правильність умовиводу:

а) «Я піду в театр або залишуся вдома. Я залишився вдома. Отже, я не пішов у театр»;

б) «Якщо я уважно слухаю лекції, то в мене відмінний конспект. Якщо в мене відмінний конспект, то мені легко буде здати залік. Отже, якщо я уважно слухаю лекції, то мені легко буде здати залік»;

в) «Якщо розроблений мною проект здасться цікавим директору, то мене чекає підвищення по службі. Якщо мене чекає підвищення по службі, то буде збільшення окладу; я нарешті-то зможу купити машину. Отже, якщо мій проект здасться директору цікавим, і він підвищить мені оклад, то я зможу купити машину»;

г) «Як правило, у вихідні Маша і Даша ходять друг до друга у гості. Маша не пішла до Даші. Отже, Даша не пішла в гості до Маші».

Розв'язання: Для перевірки правильності міркувань, скористаємося основними схемами логічно правильних міркувань, для цього перепишемо символічно висловлення у відповідності із уведеними позначеннями:

а) A - «я піду в театр», B - «я залишуся вдома», тоді висловлення приймає вигляд, що відповідає правилу «ствердження-заперечення», що є істинним:

$$\begin{array}{l} A \oplus B \\ \underline{B} \\ \therefore \sim A \end{array}$$

б) A - «я уважно слухаю лекції», B - «в мене відмінний конспект», C - «мені легко буде здати іспит», тоді висловлення приймає вид, що відповідає правилу «транзитивності (силогізму)», а, отже, є істинним:

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \underline{B \rightarrow C} \\ \therefore A \rightarrow C \end{array}$$

в) A - «мій проект здасться цікавим», B - «мене чекає підвищення по службі», C - «мене чекає збільшення окладу», D - «я зможу купити машину». Символічний запис відповідає правилу «перетину», що є істинним:

$$\frac{\begin{array}{l} A \to B \\ (B \wedge C) \to D \end{array}}{\therefore (A \wedge C) \to D}$$

г) A - «Маша пішла в гості до Даші»», B - «Даша пішла в гості до Маші». Символічний запис висловлення суперечить правилу «заперечення-ствердження», і, отже, дане висловлення - хибне:

$$\frac{\begin{array}{l} A \vee B \\ \sim A \end{array}}{\therefore \sim B}$$

<u>Приклад 3.9.</u> Встановити, які з умовиводів правильні: «Ми зібралися із друзями в похід. Погода мінлива, ми не знаємо холодно буде або пекуче. Якщо буде холодно, я можу простудитися. Якщо я візьму теплі речі, мій рюкзак буде важкий, і я дуже втомлюся. Якщо я викладу частину провізії, то рюкзак не буде таким важким, але я буду голодний. Я не хочу бути голодним. Отже: якщо буде холодно, і я не хочу простудитися і ходити голодним, то мені доведеться нести важкий рюкзак; якщо я не утомився і не простудився, то було тепло; якщо я не був голодний і мій рюкзак не був важким, то або було пекуче, або було холодно і я простудився».

Розв'язання. Уведемо позначення:

A - «буде холодно», B - «буде пекуче», C - «я можу простудитися», D - «я візьму теплі речі», E - «мій рюкзак буде важкий», F - «я втомлюся», G - «я викладу частину провізії», H - «я буду голодний». Тоді міркування і наведені три наслідки виглядають у такий спосіб:

$$\frac{A \vee B, \quad A \to C, \quad D \to E \wedge F, \quad G \to H, \quad \overline{H}}{\begin{array}{l} \therefore \left(A \wedge \overline{C} \wedge \overline{\overline{H}}\right) \to E \\ \therefore \left(\overline{F} \wedge \overline{C}\right) \to B \\ \therefore \left(\overline{H} \wedge \overline{E}\right) \to \left(B \oplus (A \wedge C)\right) \end{array}}$$

Доказ будемо проводити від оберненого (зводити до абсурду): будемо вважати, що висновок хибний, а кожна з посилок - істинна, і якщо у своїх міркуваннях ми прийдемо до протиріччя, то висновок - істинний, у противному випадку - хибний.

Розглянемо кожне з висновків окремо:

а) $\dfrac{A \vee B,\quad A \to C,\quad D \to E \wedge F,\quad G \to H,\quad \overline{H}}{\therefore \left(A \wedge \overline{C} \wedge \overline{H}\right) \to E}$

Будемо вважати, що $\left(A \wedge \overline{C} \wedge \overline{H}\right) \to E$ хибне, це можливо тільки якщо $E = 0$, а $A \wedge \overline{C} \wedge \overline{H} = 1$. Знаючи таблицю істинності для кон'юнкції, вимагаємо, щоб $A = 1$, $\overline{C} = 1$ (отже, $C = 0$), $\overline{H} = 1$ $(H = 0)$, що не суперечить останньої з посилок. Але в такому випадку посилка $A \to C$ приймає значення 0, що суперечить нашим міркуванням. Отже, висновок є істинним;

б) $\dfrac{A \vee B,\quad A \to C,\quad D \to E \wedge F,\quad G \to H,\quad \overline{H}}{\therefore \left(\overline{F} \wedge \overline{C}\right) \to B}$

Будемо вважати, що $\left(\overline{F} \wedge \overline{C}\right) \to B$ хибне. Це можливо, тільки якщо $B = 0$, а $\overline{F} \wedge \overline{C} = 1$. Виходить, $\overline{F} = 1$ $(F = 0)$, $\overline{C} = 1$ $(C = 0)$. Із $A \vee B = 1$ за умови, що $B = 0$, прямує, що $A = 1$. Але в такому випадку посилка $A \to C$ приймає значення 0, що суперечить нашим міркуванням. Отже, висновок є істинним;

в) $\dfrac{A \vee B,\quad A \to C,\quad D \to E \wedge F,\quad G \to H,\quad \overline{H}}{\therefore \left(\overline{H} \wedge \overline{E}\right) \to \left(B \oplus \left(A \wedge C\right)\right)}$

Будемо вважати, що $\left(\left(\overline{H} \wedge \overline{E}\right) \to \left(B \oplus \left(A \wedge C\right)\right)\right) = 0$, що можливо тоді і тільки тоді, коли $\overline{H} \wedge \overline{E} = 1$, а $B \oplus \left(A \wedge C\right) = 0$. Це означає, що $\overline{H} = 1$ $(H = 0)$, $\overline{E} = 1$ $(E = 0)$. Тоді з 3-ї і 4-ї гіпотези прямує, що $D = 0$ й $G = 0$. $B \oplus \left(A \wedge C\right) = 0$ у двох випадках, або якщо $B = 1$ і $A \wedge C = 1$, або якщо $B = 0$ і $A \wedge C = 0$. Розглянемо обидві ситуації.

Якщо $B=1$ і $A \wedge C=1$, тоді $C=1$, отже, і перша, і друга посилка істинні. Протиріччя немає.

Якщо $B=0$ і $A \wedge C=0$, тоді $C=0$, отже, і перша, і друга посилка істинні. Протиріччя немає.

У такому випадку можемо зробити висновок, що наведений висновок є хибним.

Завдання:

16. Встановити правильність умовиводів за допомогою правил висновку:

а) «Хто рано встає, тому Бог подає. Я рано встав. Отже, мені Бог подасть»;

б) «Буде хліб, буде й пісня. Немає хліба. Отже, немає пісні»;

в) «Я можу піти у відпустку або в червні, або в липні. Я піду у відпустку в червні. Отже, я не піду у відпустку в липні»;

г) «Викладач поцікавився, яку мову я вивчав у школі: англійську або французьку? Я відповів, що не знаю французької. Викладач вирішив, що я вивчав англійську»;

д) «Якщо Ганна пройде співбесіду, то буде прийнята в штат нашої фірми. Якщо Ганна буде прийнята в штат нашої фірми, ми станемо співробітниками. Отже, якщо Ганна пройде співбесіду, то ми станемо співробітниками»;

є) «Якщо я прошу його відповісти чесно, то він говорить мені «так», і знов, якщо я прошу його відповісти чесно, він каже мені «ні». Напевно, він мені бреше»;

ж) «Якщо співак популярний, то він збирає величезні зали шанувальників. Якщо співак не може зібрати величезні зали, то навряд чи він популярний»;

з) «Мама пояснює маляті. Якщо ти хочеш піти зі мною в гості, то обіцяй поводитися добре, тоді я візьму тебе із собою. Отже, якщо ти хочеш іти в гості і обіцяєш добре поводитися, то я візьму тебе із собою»;

і) «Якщо я поїду на трамваї № 11, я потраплю в парк; якщо я сяду в маршрутку № 3, я потраплю в парк. Я поїду або на трамваї № 11, або в маршрутці № 3. Отже, я потраплю в парк».

17. Встановити правильність умовиводів за допомогою таблиць істинності:

а) $\dfrac{\overline{C}, D \to C, A \to \left(\overline{B} \to D\right), B}{\therefore A \to C}$;

б) $\dfrac{A \to B, C \to D, A \vee C, A \to \overline{D}, C \to \overline{B}}{\therefore (A \vee B) \to (A \wedge B)}$;

в) $\dfrac{A \vee B, A \to B, B \to \left(C \to \overline{D}\right), A \to D}{\therefore \overline{A \wedge C}}$;

г) $\dfrac{C \to (B \to A), \overline{B} \to D, C}{\therefore A \vee D}$;

д) $\dfrac{A \to (B \to C), C \to \left(B \to \vec{A}\right), D \to A, A \to B}{\therefore \overline{D}}$;

е) $\dfrac{A \to B, B \to D, D \to A, B \vee C, C \to D}{\therefore D}$;

є) $\dfrac{A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D}{\therefore (A \vee C) \leftrightarrow (B \vee D)}$;

ж) $\dfrac{A \vee B, A \vee C, A \to C, C \to (A \to D)}{\therefore B \vee D}$;

з) $\dfrac{A \to (C \to B), D \to A, C}{\therefore D \to B}$;

и) $\dfrac{A, D \to C, B \vee (A \to D), B \to C}{\therefore C}$.

18. Встановити правильність умовиводів доказом від оберненого (зведення до абсурду):

а) $\dfrac{D \to F, A \to (E \to D), (C \to B) \to A}{\therefore E \to (C \vee F)}$;

б) $\dfrac{A \to B, A \to C, D \leftrightarrow E, D \to A, E \to A, B \to E, C \to D}{\therefore B \leftrightarrow C}$;

в) $\dfrac{A \vee (B \to C), C \to (B \to A), A \to D}{\therefore (A \vee B) \to D}$;

г) $\dfrac{E \to D, E \leftrightarrow C, C \leftrightarrow A, D \leftrightarrow B}{\therefore A \to B}$;

д) $\dfrac{A \to B, A \leftrightarrow C, D \leftrightarrow E}{\therefore (B \to D) \to (C \to E)}$;

е) $\dfrac{C \to (D \to E), E \to F}{\therefore ((A \to B) \to C) \to (D \to (\overline{A} \to F))}$;

є) $\dfrac{E \to D, C \vee E, A \vee D, D \to \overline{B}}{\therefore (E \wedge B) \to (E \to A)}$;

ж) $\dfrac{A \vee C, C \to D, \overline{A \wedge D}, \overline{B \wedge C}, A \to B, A \vee B}{\therefore A \wedge B}$;

з) $\dfrac{A \leftrightarrow \overline{B}, A \vee C, \overline{C \wedge E}, B \to C, B \vee D, A \to E}{\therefore \overline{C \wedge D}}$;

и) $\dfrac{A \to (B \wedge C), \overline{B} \vee D, (E \to \overline{F}) \to \overline{D}, \overline{B} \vee (A \wedge \overline{E})}{\therefore B \to E}$.

Тестове завдання до теми «Логіка висловлень»

1. Нехай A, B, C, D позначають наступні висловлення:

   A – «я повернуся в п’ятницю з роботи раніше»;

   B – «я завітаю до друга»;

   C – «я відправлюсь в кіно»;

   D – «я відпочину вдома перед телевізором».

Записати в символьній формі висловлення: «Якщо у п’ятницю мені вдасться раніше повернутися з роботи, я зможу завітати до друга і відправитися з ним у кіно або відпочити вдома перед телевізором».

А: $A \to ((B \vee C) \wedge D)$.

Б: $A \to ((B \wedge C) \vee D)$.

В: $A \vee ((B \wedge C) \vee D)$.

Г: $A \to ((B \wedge C) \to D)$.

2. Знайти істинносте значення наступного висловлення $P \vee R \leftrightarrow (Q \to \sim (R \wedge Q))$, якщо $P = 1$, $Q = 0$, $R = 1$.

А: істинне. **Б:** хибне.

3. Скласти таблицю істинності висловлення $(\sim Q \leftrightarrow P) \to R \wedge \sim (P \vee Q)$.

P	Q	R	**А**	**Б**	**В**	**Г**
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0

Контрольні запитання

1. Дайте визначення висловлення. Наведіть приклади речень які є висловленнями. Що таке істинностне значення висловлення?
2. Прості та складні висловлення. Назвіть унарні та бінарні сентенційні сполучники.
3. Побудуйте таблиці істинності сентенційних з'єднань.
4. Сформулюйте алгоритм побудови таблиці істинності складного висловлення.
5. Дайте визначення істинностної функції.
6. Які висловлення називаються тавтологіями (протиріччями)?
7. Доведіть одну з формул для тавтологічних імплікацій за допомогою таблиць істинності та за допомогою арифметичних процедур.
8. Доведіть одну з формул для тавтологічних еквіваленцій за допомогою таблиць істинності та за допомогою арифметичних процедур.
9. Доведіть одну з тавтологічних формул для виключення зв'язувань за допомогою таблиць істинності та за допомогою арифметичних процедур.
10. Дайте визначення умовиводу та логічного наслідку.
11. Перелічите найпоширеніші схеми логічно правильних міркувань.
12. Наведіть приклад словесної інтерпретації правила відділення.
13. Наведіть приклад словесної інтерпретації правила заперечення.
14. Наведіть приклад словесної інтерпретації правила ствердження-заперечення.
15. Наведіть приклад словесної інтерпретації правила заперечення-ствердження.
16. Наведіть приклад словесної інтерпретації правила силогізму (транзитивності).

4. АЛГЕБРА ЛОГІКИ

4.1. Логічні функції. Основні визначення

Алгебра логіки є самостійним розділом математичної логіки. Предметом її вивчення є побудова складних логічних висловлень, що представляють логічними формулами, і методів установлення їхньої істинності.

Нехай $B=\{0,1\}$ - бінарна множина, елементами якого є 0 і 1, що не мають арифметичного змісту, логічна інтерпретація яких є «істинно», «хибно» або «так», «ні».

Визначення 4.1. Алгебра, утворена множиною B разом з усіма можливими операціями на ньому, називається ***алгеброю логіки***. При цьому множина B називається ***основною множиною*** або ***носієм алгебри***.

Визначення 4.2. ***Функцією алгебри логіки*** (або ***логічною функцією, булевою функцією***) f від n змінних $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається n-вимірна логічна операція на множині B. Тобто, $f: B^n \to B$. Логічна функція - функція від логічних змінних також може приймати тільки два логічних значення 0 або 1.

Множину всіх логічних функцій будемо позначати як P_2. Множину всіх логічних функцій n змінних - $P_2(n)$.

Визначення 4.3. ***Логічною формулою*** називається формула, що складається з букв, знаків логічних операцій і дужок. При цьому букви позначають логічні змінні. Кожна формула задає логічну функцію.

Будь-яку логічну функцію можна задати або логічною формулою, або за допомогою таблиці істинності.

При визначенні логічної функції за допомогою таблиці істинності, у таблиці ліворуч виписуються всі можливі набори значення логічних змінних, а праворуч – значення функції, що відповідають цим наборам. Набір значень змінних, при якому $f(x_1, x_2, ..., x_n)=1$, називається *одиничним набором функції*, набір значень змінних, при якому $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, називається *нульовим набором функції*.

Число всіх можливих наборів, що розрізняються, логічної функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ від n змінних дорівнює 2^n. Ця множина з 2^n наборів є *областю визначення* логічної функції. Число всіх різних функцій n змінних дорівнює числу можливих розміщень нулів і одиниць у стовпці таблиці з 2^n рядками, тобто 2^{2^n}.

<u>Визначення 4.4.</u> Змінна x_i логічної функції $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ називається ***несуттєвою*** (або ***фіктивною***), якщо $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n) =$ $= f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n)$ при будь-яких значеннях інших змінних, тобто зміна x_i в будь-якому наборі значень $x_1, ..., x_n$ не міняє значення функції.

Нехай змінна x_i є фіктивною для функції $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$. Вилучимо з таблиці істинності стовпець аргументу x_i. Тобто, буде отримана нова таблиця для функції $n-1$ змінної, котру позначимо як $g(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$. Отже, функція g отримана з функції f шляхом вилучення фіктивної змінної.

<u>Визначення 4.5.</u> Дві функції називають *рівними*, якщо одну можна одержати з іншої шляхом вилучення або додавання фіктивних змінних.

Логічних функцій однієї змінної $2^{2^1} = 4$. Множина всіх логічних функцій однієї змінної представлене в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1.

x	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Тут $\varphi_0(x)=0$, $\varphi_3(x)=1$ константи 0 і 1 відповідно. Значення цих функцій не залежить від змінної x, отже, змінна x тут є фіктивною. Функції $\varphi_1(x)=x$ - повторення змінної, $\varphi_2(x)=\bar{x}$ - заперечення змінної.

Логічних функцій двох змінних $2^{2^2}=16$. Множина всіх логічних функцій двох змінних представлене в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2.

x_1	x_2	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8	ϕ_9	ϕ_{10}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{13}	ϕ_{14}	ϕ_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Дамо визначення функцій, наведених у табл. 4.2:

$\phi_0=0$ - константа 0;

$\phi_1=x_1\wedge x_2$ - кон'юнкція;

$\phi_2=\overline{x_1\rightarrow x_2}$ - заперечення імплікації;

$\phi_3=x_1$ - повторення x_1;

$\phi_4=\overline{x_1\leftarrow x_2}$ - заперечення коімплікації;

$\phi_5=x_2$ - повторення x_2;

$\phi_6=x_1\oplus x_2$ - додавання за модулем 2;

$\phi_7=x_1\vee x_2$ - диз'юнкція;

$\phi_8=x_1\downarrow x_2$ - стрілка Пірса;

$\phi_9=x_1\leftrightarrow x_2$ - еквівалентність;

$\phi_{10}=\bar{x}_2$ - заперечення x_2;

$\phi_{11}=x_1\leftarrow x_2$ - коімпликація;

$\phi_{12}=\bar{x}_1$ - заперечення x_1;

$\phi_{13}=x_1\rightarrow x_2$ - імплікація;

$\phi_{14} = x_1 | x_2$ - штрих Шеффера;

$\phi_{15} = 1$ - константа 1.

Як можна помітити, з 16 функцій двох змінних, шість мають фіктивні змінні:

- у функціях ϕ_0 і ϕ_{15} фіктивні змінні x_1 і x_2;
- у функціях ϕ_5 і ϕ_{10} фіктивна змінна x_1;
- у функціях ϕ_3 і ϕ_{12} фіктивна змінна x_2.

Визначення 4.6. ***Суперпозицією функцій*** $f_1, ..., f_n$ називається функція f, яка отримана за допомогою підстановок цих функцій друг у друга і перейменування змінних.

Наприклад, $f(x_1, x_2, x_3) = f_4(f_1(x_2, f_2(x_3, x_1)), f_3(x_2, x_1))$ являє собою суперпозицію функцій.

Приклад 4.1.

Нехай $f(x_1, x_2, x_3) = f_4(f_1(x_2, f_2(x_3, x_1)), f_3(x_2, x_1))$ і f_1 означає кон'юнкцію, f_2 - диз'юнкцію, f_3 - імплікацію, f_4 - додавання за модулем 2. Представити функцію формулою і обчислити значення функції на наборі $(0,0,1)$

Розв'язання: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$. Формула має вигляд:
$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 \wedge (x_3 \vee x_2)) \oplus (x_2 \to x_1)$.

Обчислимо значення f на наборі $(0,0,1)$, для чого підставимо в отриману формулу значення змінних:

$$(x_2 \wedge (x_3 \vee x_2)) \oplus (x_2 \to x_1)$$

0 1 0 0 0

1 1

0

1

Тобто, при даному наборі змінних функція істинна.

Приклад 4.2. Обчислити значення функції $f = \phi_6(\phi_1(x_1, x_2), \phi_{11}(x_3, x_2))$ на наборі $(1,0,1)$.

Розв'язання: Скористаємося табл. 4.2: $\phi_1(1,0) = 0$, $\phi_{11}(1,0) = 1$, а $\phi_6(0,1) = 1$. Тобто, при даному наборі змінних функція істинна.

Визначення 4.7. ***Еквівалентними,*** або ***рівносильними,*** називаються формули, що подають ту саму функцію. Еквівалентність формул в алгебрі логіці позначається символом «=».

Для того, щоб встановити еквівалентність формул, потрібно скласти їхні таблиці істинності, і порівняти їх на кожному наборі змінних.

Приклад 4.3. Довести еквівалентність формул

$$x_1 \oplus x_2 = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2).$$

Розв'язання: Складемо таблиці істинності наведених формул.

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$	$(x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Як бачимо, таблиці істинності формул $x_1 \oplus x_2$ і $(x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)$ збігаються. Звідси робимо висновок, що формули еквівалентні.

Використовуючи таблиці істинності можна довести наступні **логічні еквівалентності (закони логіки Буля)**:

1. ***Закони ідемпотентності:*** $x \wedge x = x$; $x \vee x = x$.

2. ***Закон подвійного заперечення:*** $\overline{\overline{x}} = x$.
3. ***Властивості комутативності:*** $x \wedge y = y \wedge x$; $x \vee y = y \vee x$.
4. ***Властивості асоціативності:***
   $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge y \wedge z$;
   $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = x \vee y \vee z$.
5. ***Властивості дистрибутивності:***
   $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
   $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.
6. ***Закони де Моргана:*** $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$; $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$.
7. ***Властивості констант:*** $x \wedge 1 = x$; $x \wedge 0 = 0$; $x \vee 1 = 1$; $x \vee 0 = x$;
   $\overline{0} = 1$; $\overline{1} = 0$.
8. ***Закон протиріччя:*** $x \wedge \overline{x} = 0$.
9. ***Закон виключення третього:*** $x \vee \overline{x} = 1$.
10. ***Закон поглинання:*** $(x \wedge y) \vee x = x$.
11. ***Закон склеювання:*** $(x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) = x$.
12. ***Закон узагальненого склеювання:***
    $(x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge z) \vee (y \wedge z) = (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge z)$.
13. ***Розкриття імплікації і еквівалентності:*** $x \to y = \overline{x} \vee y$;
    $x \leftrightarrow y = (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y})$.

Тотожні перетворення викликають величезний інтерес у задачах по спрощенню формул. Внаслідок того що формули найчастіше являють собою суперпозицію інших формул і функцій, то можна говорити про входження у формули інших формул, називаних *підформулами*. Тобто, при виконанні тотожних перетворень будь-які підформули можна заміняти еквівалентними їм.

Приклад 4.4. Використовуючи закони логіки Буля, спростити формулу $(y \vee z) \vee (x \wedge \overline{z})$.

Розв'язання:

$(y \vee z) \vee (x \wedge \overline{z}) = y \vee (z \vee (x \wedge \overline{z})) =$ закон асоціативності

$= y \vee ((z \vee x) \wedge (z \vee \bar{z}))$ =закон дистрибутивності
$= y \vee ((z \vee x) \wedge 1) =$ закон виключення третього
$= y \vee (z \vee x)$ властивості констант

Завдання:

1. Нехай f_1 означає кон'юнкцію, f_2 - диз'юнкцію, f_3 - імплікацію, f_4 - додавання за модулем 2. Представити функцію формулою і обчислити значення функції на зазначеному наборі:
   а) $f_2(f_4(x_1, f_3(x_2, x_1)), f_1(x_3, x_1))$; $(0,1,1)$;
   б) $f_2(f_1(x_1, x_2), f_3(x_2, f_1(x_3, x_2)))$; $(1,0,1)$;
   в) $f_1(f_2(f_3(x_1, x_2), f_1(x_1, x_3)), x_2)$; $(0,0,1)$;
   г) $f_3(f_1(x_2, x_1), f_2(x_2, f_3(x_3, f_2(x_1, x_3))))$. $(1,1,1)$.

2. Скласти таблиці істинності функцій, заданих формулами:
   а) $\bar{x}_2 \to (\bar{x}_1 \vee x_2)$; б) $x_2 | (x_1 \leftrightarrow \bar{x}_3)$;
   в) $(x_1 \downarrow \bar{x}_2)\, x_3$; г) $\bar{x}_1 \to (x_2 \oplus x_3)$;
   д) $x_1 \leftrightarrow (x_3 \downarrow \bar{x}_2)$; е) $(x_1 | x_2) \leftrightarrow \bar{x}_3$.

3. Обчислити значення функцій на зазначених наборах:
   а) $\phi_6(\phi_1(x_1, x_2), \phi_{11}(x_3, x_2))$, $(0,1,0)$;
   б) $\phi_{13}(\phi_8(x_3, x_1), \phi_1(x_2, x_1))$, $(1,1,0)$;
   в) $\phi_{11}(\varphi_2(x_3), \phi_7(x_1, x_2))$, $(0,0,1)$;
   г) $\phi_7(\phi_4(x_3, x_1), \varphi_3(x_2))$, $(0,1,1)$;
   д) $\phi_{13}(\phi_1(x_1, x_2), \varphi_3(x_3))$, $(0,0,0)$;
   е) $\phi_2(\varphi_2(x_1), \phi_6(x_2, x_3))$, $(1,0,1)$.

4. Використовуючи таблиці істинності, довести еквівалентність законів алгебри логіки.
5. Скориставшись законами логіки Буля, максимально спростити вираження. За допомогою таблиць істинності порівняти початкове вираження зі спрощеним:

а) $\left(x \vee \left(\bar{k} \wedge y\right)\right) \wedge \left(\left(\bar{x} \wedge \left(\bar{y} \vee k\right)\right) \vee z\right) \vee \bar{z} \vee \left(x \vee \left(y \wedge \bar{k}\right)\right)$;
б) $\left(\left(x \vee z\right) \wedge \left(x \vee k\right)\right) \wedge \left(\left(\left(z \vee \left(z \wedge y\right)\right) \wedge \bar{z}\right) \vee \bar{x}\right)$;
в) $\left(\bar{y} \vee k\right) \wedge \left(\left(\bar{k} \wedge z\right) \vee \left(x \wedge z\right) \vee \left(\bar{k} \wedge \bar{z}\right) \vee \left(x \wedge \bar{z}\right)\right) \wedge \left(y \vee k\right)$;
г) $\left(x \vee \bar{z}\right) \wedge \left(\bar{x} \vee \bar{y}\right) \wedge \left(\bar{y} \vee z\right) \wedge \left(\bar{x} \vee y\right) \wedge \left(y \vee z\right)$;
д) $\left(x \wedge z\right) \vee \left(\left(y \vee \bar{k}\right) \wedge \left(\bar{x} \vee \bar{k}\right) \wedge \left(\bar{x} \vee k\right) \wedge \left(k \vee y\right)\right) \vee \left(x \wedge \bar{z}\right)$;
е) $\left(\left(\bar{y} \vee \bar{z}\right) \wedge \left(x \vee y\right)\right) \vee \left(k \wedge \bar{z}\right) \vee \left(\left(\left(\bar{y} \wedge \bar{x}\right) \vee z\right) \wedge \left(x \vee y\right)\right)$.

4.2. Булева алгебра. Довершені нормальні форми

Як ми вже показали, одна і та ж сама логічна функція може бути представлена формулами, що включають різні набори логічних операцій. Виявляється, існують такі набори логічних функцій (операцій над логічними змінними), за допомогою яких можна визначити будь-які інші логічні функції.

<u>Визначення 4.8.</u> Система функцій Σ називається *функціонально повною* (або *базисом*), якщо будь-яка булева функція може бути представлена у вигляді формули, що складається тільки з функцій цієї системи.

Існує ряд функціонально повних систем логічних функцій, наприклад, $\{\wedge, \vee, \sim\}$, $\{\wedge, \sim\}$, $\{\vee, \sim\}$, $\{\ \mid\ \}$, $\{\downarrow\}$, $\{\wedge, \oplus, 1\}$, $\{\rightarrow, \sim\}$, $\{\vee, \sim, \oplus\}$, $\{\wedge, \sim, \oplus\}$ і ін. На деяких з них ми зупинимося докладніше нижче.

Найбільш детально розглянутим і найчастіше використовуваним є базис $\{\wedge, \vee, \sim\}$. Формули, що містять тільки знаки функцій кон'юнкції, диз'юнкції і заперечення називаються *булевими*.

<u>Визначення 4.9.</u> Алгебра $\left(P_2, \wedge, \vee, \sim\right)$, основною множиною якої є множина всіх логічних функцій двох змінних P_2, а операціями - кон'юнкція, диз'юнкція і заперечення, називається *булевою алгеброю логічних функцій*. Операції і формули булевої алгебри називаються *булевими*.

Система операцій булевої алгебри $\{\wedge, \vee, \sim\}$ функціонально повна. Отже, перехід від табличного завдання будь-якої логічної функції до булевої формули завжди можливий.

Теорема 4.1. Усяка логічна функція може бути представлена булевою формулою, тобто як суперпозиція кон'юнкції, диз'юнкції і заперечення.

Наслідок 1. Усяка логічна функція може бути представлена формулою:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vee\, x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n},\ f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1,$$

яку називають *довершеною диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ)*.

Тут диз'юнкція береться по всіх наборах $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, на яких функція $f = 1$. ДДНФ функції f містить стільки диз'юнкцій, скільки одиниць у таблиці f; кожному одиничному набору $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ відповідає кон'юнкція всіх змінних, у яких x_i узято із запереченням, якщо $\sigma_i = 0$ і без заперечення, якщо $\sigma_i = 1$.

Існує взаємно однозначна відповідність між таблицею функції f і її ДДНФ. Отже, ДДНФ для всякої логічної функції єдина.

Приклад 4.5. Записати ДДНФ функції, заданою таблицею.

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	1	0	0	1	0	0

Розв'язання:

Виділимо набори змінних, якім відповідають одиничні значення функції. ДДНФ даної функції має вигляд: $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$.

Зауваження 1. Єдина функція, що не має ДДНФ - це константа 0, тому що не має жодного одиничного набору в таблиці істинності.

Наслідок 2. Усяка логічна функція може бути представлена формулою

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} \overline{x_i^{\sigma_i}} \right),\ f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0,$$

яку називають *довершеною кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ)*.

Тут кон'юнкція береться по всіх наборах $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, на яких функція $f = 0$. ДКНФ функції f містить стільки кон'юнкцій, скільки нулів у таблиці f; кожному нульовому набору $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ відповідає диз'юнкція всіх змінних, у яких x_i узяте із запереченням, якщо $\sigma_i = 1$ і без заперечення, якщо $\sigma_i = 0$.

Існує взаємно однозначна відповідність між таблицею функції f і її ДКНФ, отже, ДКНФ для всякої логічної функції єдина.

Приклад 4.6.

Записати ДКНФ функції, заданою таблицею.

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	1	0	0	1	0	0

Розв'язання: Виділимо набори змінних, яким відповідають нульові значення функції. ДКНФ даної функції має вигляд: $f(x_1, x_2, x_3) =$
$= (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

Зауваження 2. Єдина функція, що не має ДКНФ - це константа 1, тому що не має жодного нульового набору в таблиці істинності.

Зауваження 3. Із двох формул – ДДНФ і ДКНФ – звичайно вибирають ту, яка коротше. Тобто, якщо таблиця функції f містить менше одиничних наборів, то – ДДНФ; якщо містить менше нульових наборів – ДКНФ.

Приклад 4.7. Логічну функцію трьох змінних

$$f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \vee x_2)\bar{x}_3) \to (x_1 \leftrightarrow x_3)$$

представити булевой формулою: у вигляді ДДНФ, у вигляді ДКНФ.

Розв'язання:

Побудуємо таблицю істинності формули

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_3$	$x_1 \vee x_2$	$(x_1 \vee x_2)\bar{x}_3$	$x_1 \leftrightarrow x_3$	$((x_1 \vee x_2)\bar{x}_3) \to (x_1 \leftrightarrow x_3)$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	1	1

ДДНФ функції має вигляд:

$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$.

ДКНФ функції має вигляд:
$f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$.

Приклад 4.8. Згідно з таблицею 4.2 визначити ДКНФ функції $x_1 \mid x_2$.

Розв'язання: Скориставшись табл. 4.2 запишемо ДКНФ штриха Шеффера $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$.

Приклад 4.9. Згідно з таблицею 4.2 визначити ДДНФ функції $x_1 \downarrow x_2$.

Розв'язання: Скориставшись табл. 4.2 запишемо ДДНФ стрілки Пірса $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2$.

Завдання:

6. Знайти ДДНФ і ДКНФ функцій $f_1, \ldots, f_7$ трьох змінних, заданих таблицею:

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	0	0	1	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1	1	0	1

7. Логічну функцію представити булевою формулою у вигляді ДДНФ і у вигляді ДКНФ:

а) $f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \oplus x_2)(x_3 \oplus 1)$; б) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \mid \overline{(x_3 \vee x_2)}$;

в) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \downarrow x_2)(x_3 \oplus x_1)$; г) $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \oplus (x_1\bar{x}_2)$.

8. Скориставшись таблицею 4.2 записати ДДНФ функцій ϕ_1, ϕ_2, ϕ_4, ϕ_8, ϕ_9.
9. Скориставшись таблицею 4.2 записати ДКНФ функцій ϕ_3, ϕ_6, ϕ_{11}, ϕ_{12}, ϕ_{13}.
10. Одержати ДДНФ логічної функції $f(x_1, x_2, x_3)$, використовуючи її табличне подання, якщо вона задана булевою формулою:

    а) $\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$; б) $x_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$;

    в) $\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$; г) $\bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1x_2x_3$.

4.3. Еквівалентні перетворення

Еквівалентні перетворення – перетворення, що використовують еквівалентні співвідношення. Логічні еквівалентності (еквівалентні співвідношення) були розглянуті в п. 4.1. Еквівалентні перетворення використовуються для спрощення формул і для доведення еквівалентності формул.

Визначення 4.10. *Елементарною кон'юнкцією* називається кон'юнкція змінних або їхніх заперечень, у якій кожна змінна зустрічається не більше одного разу.

Визначення 4.11. *Диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ)* називається формула, що має вигляд диз'юнкції елементарних кон'юнкцій.

Тобто, ДДНФ - це ДНФ, кожна елементарна кон'юнкція якої містить всі змінні із запереченням або без.

Приведення булевої функції до ДНФ полягає в наступному:

а) всі заперечення необхідно опустити до змінних, використовуючи подвійне заперечення і закони де Моргана;

б) розкрити дужки, використовуючи закони асоціативності і дистрибутивності;

в) видалити зайві кон’юнкції і повторення змінних у кон’юнкціях за допомогою законів ідемпотентності, протиріччя і виключення третього;

г) видалити константи, використовуючи властивості констант.

Процедура приведення ДНФ до ДДНФ зводиться до використання закону склеювання у зворотному напрямку для кон’юнкцій, які містять не всі змінні. Інший же спосіб одержання ДДНФ нам добре відомий. По ДНФ - булевої формули - будується таблиця істинності, на підставі якої ми можемо записати ДДНФ.

<u>Приклад 4.10.</u> Одержати ДНФ функції

$$f(x,y,z)=x\bar{y}\vee z(\bar{x}\vee y\bar{z}).$$

Розв’язання:

$$f(x,y,z)=x\bar{y}\vee z(\bar{x}\vee y\bar{z})=x\bar{y}\vee(\bar{x}z\vee yz\bar{z})=x\bar{y}\vee(\bar{x}z\vee y0)=$$
$$=x\bar{y}\vee(\bar{x}z\vee 0)=x\bar{y}\vee\bar{x}z\ .$$

<u>Приклад 4.11.</u> Одержати ДНФ функції

$$f(x,y,z)=y\vee x(\bar{y}\vee\bar{x}\bar{z})\overline{(y(\bar{x}\vee z)\vee xy)}.$$

Розв’язання:

$$f(x,y,z)=y\vee x(\bar{y}\vee\bar{x}\bar{z})\overline{(y(\bar{x}\vee z)\vee xy)}=$$
$$=y\vee(x\bar{y}\vee x\bar{x}\bar{z})\,\overline{(y(\bar{x}\vee z))}\,\overline{xy}=y\vee(x\bar{y}\vee 0z)\left(\bar{y}\vee\overline{(\bar{x}\vee z)}\right)\cdot(\bar{x}\vee\bar{y})=$$
$$=y\vee x\bar{y}\left(\bar{y}\vee\bar{\bar{x}}\bar{z}\right)(\bar{x}\vee\bar{y})=y\vee x\bar{y}(\bar{y}\vee x\bar{z})(\bar{x}\vee\bar{y})=$$
$$=y\vee x\bar{y}(\bar{x}\,\bar{y}\vee x\,\bar{x}\,\bar{z}\vee\bar{y}\,\bar{y}\vee x\,\bar{y}\,\bar{z})=y\vee x\bar{y}(\bar{x}\,\bar{y}\vee 0\bar{z}\vee\bar{y}\vee x\,\bar{y}\,\bar{z})=$$
$$=y\vee x\bar{y}(\bar{x}\,\bar{y}\vee\bar{y}\vee x\,\bar{y}\,\bar{z})=y\vee(x\,\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{y}\vee x\,\bar{y}\,\bar{y}\vee x\,x\,\bar{y}\,\bar{y}\,z)=$$
$$=y\vee(x\bar{y}\vee x\bar{y}\,\bar{z})=y\vee x\bar{y}(1\vee\bar{z})=y\vee x\bar{y}1=y\vee x\bar{y}=x\vee y\ .$$

<u>Приклад 4.12.</u> Нехай логічна функція задана формулою $f(x,y,z) = x \vee y\bar{z} \vee x\bar{y}\,\bar{z}$. Спростити формулу, використовуючи еквівалентні перетворення.

Одержати ДДНФ функції, використовуючи:

а) табличне подання функції $f(x,y,z)$;

б) зворотне склеювання.

Розв'язання: Спростимо формулу

$$f(x,y,z) = x \vee y\bar{z} \vee x\bar{y}\,\bar{z} = x \vee \bar{z}(y \vee x\bar{y}) = x \vee \bar{z}(x \vee y) = x \vee x\bar{z} \vee y\bar{z} =$$
$$= x(1 \vee \bar{z}) \vee y\bar{z} = x1 \vee y\bar{z} = x \vee y\bar{z}\,.$$

Для одержання ДДНФ функції, побудуємо її таблицю істинності, з якої знаходимо п'ять одиничних наборів функції.

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
$x \vee y\bar{z}$	0	0	1	0	1	1	1	1

Отже, ДДНФ має вигляд

$f(x,y,z) = \bar{x}y\bar{z} \vee x\overline{y}\overline{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$.

Одержання ДДНФ за допомогою зворотного склеювання зводиться до наступного:

$$f(x,y,z) = x \vee y\bar{z} = x(y \vee \bar{y})(z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x})y\bar{z} =$$
$$= xyz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\overline{y}\overline{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} =$$
$$= xyz \vee x\bar{y}z \vee x\overline{y}\overline{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$$

Як можемо переконатися, отримані двома способами ДДНФ збігаються.

Визначення 4.12. *Елементарною диз’юнкцією* називається диз'юнкція змінних або їхніх заперечень, у якій кожна змінна зустрічається не більше одного разу.

Визначення 4.13. *Кон’юнктивною нормальною формою (КНФ)* називається формула, що має вигляд кон’юнкції елементарних диз'юнкцій.

Тобто, ДКНФ - це КНФ, кожна елементарна диз'юнкція якої включає всі змінні із запереченням або без.

Приведення булевой функції до КНФ полягає в наступному:

а) необхідно застосувати до формули правило подвійного заперечення і привести до ДНФ;

б) за допомогою законів де Моргана звільнитися від подвійного заперечення і перетворити заперечення елементарних кон’юнкцій в елементарні диз'юнкції.

Приклад 4.13. Одержати КНФ функції

$$f(x, y, z) = xz \vee y\bar{z} \vee x\,.$$

Розв’язання:

$$f(x, y, z) = xz \vee y\bar{z} \vee x = \overline{\overline{xz \vee y\bar{z} \vee x}} = \overline{\overline{xz} \cdot \overline{y\bar{z}} \cdot \bar{x}} = \overline{(\bar{x} \vee \bar{z})(\bar{y} \vee z)\bar{x}} =$$

$$= \overline{(\bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}z \vee z\bar{z})\bar{x}} = \overline{(\bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}z)\bar{x}} = \overline{\bar{x}\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{x}z} =$$

$$= \overline{\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}z} = \overline{\bar{x}\bar{y}(1 \vee \bar{z}) \vee \bar{x}z} = \overline{\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}z} = (x \vee y)(x \vee \bar{z})\,.$$

4.4. Двоїстість булевих функцій

Визначення 4.14. Функція $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ називається *двоїстою* до функції $f(x_1, \ldots, x_n)$, якщо справедливо співвідношення

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)\,.$$

Операція побудови двоїстої функції складається в інвертуванні всіх змінних і «навішуванні» інверсії над самою функцією (над першим функціональним символом, що був використаний при записі формули, що задає f як суперпозицію інших функцій). Для константи - функції з порожньою множиною змінних - інверсія застосовується тільки до функціональних символів 0 або 1.

Визначення 4.15. Набір $(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)$ називається *протилежним* набору $(x_1,...,x_n)$ і позначається $\bar{\bar{x}}$.

Функція, двоїста до даної, приймає на протилежних наборах $\bar{\bar{x}}$ значення, протилежне значенню $f(\bar{x})$. Отже, таблицю істинності двоїстої функції $f^*(x_1,...,x_n)$ отримують із таблиці для функції $f(x_1,...,x_n)$ інвертуванням і перевертанням стовпця функції.

Приклад 4.14. Знайти функцію, двоїсту даної $x_1 \wedge x_2$.

Розв'язання: Складемо таблицю істинності функції, що уявляє кон'юнкцію двох змінних:

x_1	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
$x_1 \wedge x_2$	0	0	0	1
$(x_1 \wedge x_2)^* = \overline{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2}$	0	1	1	1

Останній рядок таблиці істинності відповідає диз'юнкції, тому є справедливим наступний ланцюжок тотожностей: $(x_1 \wedge x_2)^* = \overline{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2} = x_1 \vee x_2$, відповідно за яким, диз'юнкція виявляється двоїстою до кон'юнкції.

Зауважимо, що відношення двоїстості між функціями симетрично, тобто якщо f^* двоїста до f, то f двоїста до f^*:

$$\bar{f}(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) = \bar{\bar{f}}^*(\bar{\bar{x}}_1,...,\bar{\bar{x}}_n) = f^*(x_1,...,x_n).$$

<u>Визначення 4.16.</u> Функція, двоїста до самої себе, називається *самодвоїстою*.

<u>Принцип двоїстості.</u> Якщо у формулі F, що описує функцію f, всі символи функції замінити на символи відповідних двоїстих функцій, то отримана формула F^* буде описувати функцію f^*, двоїсту до вихідної функції f.

<u>Принцип двоїстості в булевій алгебрі.</u> Якщо у формулі F, що описує функцію f, всі кон'юнкції замінити на диз'юнкції, а диз'юнкції на кон'юнкції, 1 на 0, а 0 на 1, то одержимо формулу F^*, що буде описувати функцію f^*, двоїсту до вихідної функції f.

Справедливе твердження: якщо функції рівні $(f_1 = f_2)$, то рівні і двоїсті їм функції $\left(f_1^* = f_2^*\right)$.

У таблиці 4.3 представлені двоїсті функції до найчастіше використовуваних булевих функцій. Перевірити дані з таблиці 4.3. можна за допомогою принципу побудови таблиць істинності двоїстих функцій.

Таблиця 4.3.

f	1	0	x	$\bar{x}$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \mid x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
f^*	0	1	x	$\bar{x}$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \downarrow x_2$	$x_1 \mid x_2$

Принцип двоїстості іноді дозволяє спростити одержання тотожностей і доведення тверджень.

<u>Приклад 4.15.</u> Знайти формулу, що описує функцію, двоїсту до $x_1 \to x_2$.

Розв'язання:

$$(x_1 \to x_2)^* = (\bar{x}_1 \vee x_2)^* = \bar{x}_1 \wedge x_2 = \overline{\overline{\bar{x}_1 \wedge x_2}} = \overline{x_1 \vee \bar{x}_2} = \overline{x_2 \to x_1}.$$

<u>Приклад 4.16.</u> Для функції $f(x_1,x_2)=x_1x_2\vee\bar{x}_1\bar{x}_2$ знайти двоїсту.

Розв'язання:

$$f^*(x_1,x_2)=(x_1x_2\vee\bar{x}_1\bar{x}_2)^*=(x_1\vee x_2)\wedge(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2).$$

Завдання:

11. Одержати ДНФ функції:

а) $f(x,y,z)=\overline{(x\vee\bar{y})\vee\overline{x\bar{z}}\vee y}$;

б) $f(x,y,z)=\overline{xy}\vee\overline{x\bar{z}\vee y}\vee\overline{x\bar{y}z}$;

в) $f(x,y,z)=\overline{\overline{x\vee\bar{z}}\vee(x\bar{y}\vee z)}\vee\bar{x}yz$;

г) $f(x,y,z)=\overline{\overline{xyz}\vee\overline{(\bar{x}\vee y)x\bar{z}}}\vee y$;

д) $f(x,y,z)=\overline{\bar{y}z\vee\bar{x}}\vee\overline{x\bar{y}\vee\overline{(y\vee\bar{z})}}$;

е) $f(x,y,z)=\overline{\overline{xy}\vee\overline{(\bar{x}z\vee y)}}\vee\bar{x}yz$;

є) $f(x,y,z)=\overline{x\bar{y}\vee\overline{(yz\vee\bar{x})}}\vee\overline{xy}$;

ж) $f(x,y,z)=x\vee\overline{y\vee\overline{(x\bar{z}\vee\bar{x}y)}\vee z}$.

12. Спростити формулу, використовуючи: а) еквівалентні перетворення; б) зворотне склеювання. Одержати ДДНФ функції за допомогою табличного подання функції $f(x,y,z)$.

а) $f(x,y,z)=\bar{x}z\vee xyz\vee\bar{x}\bar{z}$;

б) $f(x,y,z)=yz\vee\bar{x}z\vee xyz$;

в) $f(x,y,z)=x\bar{y}\vee x\bar{z}\vee yz\vee\bar{x}yz$;

г) $f(x,y,z)=\bar{y}z\vee x\bar{y}\vee xz\vee xy\bar{z}$;

д) $f(x,y,z)=xy\vee yz\vee xz\vee x\bar{y}$;

е) $f(x,y,z)=\bar{x}y\vee xy\bar{z}\vee xz\vee yz$;

є) $f(x,y,z)=xz\vee\bar{x}y\vee y\bar{z}\vee\bar{x}y\bar{z}$;

ж) $f(x,y,z)=xy\vee y\bar{z}\vee x\bar{y}z$.

13. Одержати КНФ функції $f(x,y,z)$ за правилом зведення ДНФ до КНФ:

а) $f(x,y,z)=xy\vee x\bar{z}\vee z$;
б) $f(x,y,z)=xy\vee \bar{y}z\vee \bar{x}\bar{z}$;
в) $f(x,y,z)=xy\vee \bar{y}\bar{z}\vee \bar{x}\bar{y}$;
г) $f(x,y,z)=x\bar{y}\vee \bar{x}yz$;
д) $f(x,y,z)=\bar{x}\vee yz\vee \bar{x}y\bar{z}$;
е) $f(x,y,z)=xy\vee \bar{y}z$;
є) $f(x,y,z)=xy\vee \bar{y}\vee xy\bar{z}$;
ж) $f(x,y,z)=z\vee x\bar{y}z\vee \bar{x}y$.

14. Для функції $f(x_1,x_2,x_3)$ знайти двоїсту:

а) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2\bar{x}_3\vee \overline{x_1\vee x_2x_3}$;
б) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_2\vee x_3)\vee(x_2\bar{x}_3\vee x_1x_3)$;
в) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\bar{x}_2\vee x_2x_3\vee x_1\bar{x}_2x_3$;
г) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee \bar{x}_2)(x_1\bar{x}_3\vee x_2x_3)$.

4.5. Функціонально повні системи

Вище (див. п. 4.2) було уведено визначення функціонально повних систем. Було показано, що система Буля $\Sigma_0=\{\wedge,\vee,\sim\}$ функціонально повна, тобто будь-яка логічна функція може бути подана у вигляді формули, що складається з функцій тільки цієї системи.

Розглянемо систему $\Sigma_1=\{\wedge,\sim\}$, яка називається *кон’юнктивною системою Буля*. Скориставшись законами де Моргана і подвійного заперечення можна виключити диз'юнкцію: $x\vee y=\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}$.

Розглянемо систему $\Sigma_2=\{\vee,\sim\}$, яка називається *диз’зюнктивною системою Буля*. Скориставшись законами де Моргана і подвійного заперечення можна виключити кон’юнкцію: $x\wedge y=\overline{\bar{x}\vee\bar{y}}$.

З повноти системи Σ_0 і можливості подання однієї з функцій через інші, прямує висновок про повноту систем Σ_1 і

Σ_2. У цьому сенсі система Σ_0 виявляється надлишковою, тому що вона зберігає властивості повноти і при вилученні з неї диз'юнкції або кон’юнкції.

Приклад 4.17. Подати булеву формулу $z(x\vee y)\vee\bar{x}y$ у базисі $\Sigma_1=\{\wedge,\sim\}$ і $\Sigma_2=\{\vee,\sim\}$.

Розв’язання:

$$z(x\vee y)\vee\bar{x}y=z\cdot\overline{\bar{x}\;\bar{y}}\vee\bar{x}y=\overline{\overline{z\cdot\overline{\bar{x}\;\bar{y}}}\cdot\overline{\bar{x}y}}\,;$$

$$z(x\vee y)\vee\bar{x}y=\overline{\bar{z}\vee\overline{(x\vee y)}}\vee\overline{\bar{\bar{x}}\vee\bar{y}}=\overline{\bar{z}\vee\overline{(x\vee y)}}\vee\overline{x\vee\bar{y}}\,.$$

З наведеного приклада можемо зробити висновок, що в базисі $\Sigma_0=\{\wedge,\vee,\sim\}$ логічні функції мають більш прості формули. Ненадлишкові базиси мають більш громіздкий запис формул, що описують логічні функції. Тому в кожному конкретному випадку доводиться вибирати між кількістю використовуваних операцій і громіздкістю одержуваних виразів.

Розглянемо систему $\Sigma_3=\{\,|\,\}$, яка називається *системою Шеффера*. Ця система функціонально повна, тому що зводиться до системи Σ_1 в такий спосіб:

$$\bar{x}=x\,|\,x\,;\qquad\qquad xy=\overline{x\,|\,y}$$

Це легко перевірити по таблиці 4.2. істинності для функції ϕ_{14}.

Приклад 4.18. Подати булеву формулу $z(x\vee y)\vee\bar{x}y$ в базисі $\Sigma_3=\{\,|\,\}$.

Розв’язання: Скористаємося результатами приклада 4.14:

$$z(x\vee y)\vee\bar{x}y=\overline{\overline{z\cdot\overline{\bar{x}\;\bar{y}}}\cdot\overline{\bar{x}y}}=\overline{\overline{z\cdot\overline{(x\,|\,x)\cdot(y\,|\,y)}}\cdot\overline{(x\,|\,x)\cdot y}}=$$

$$=\overline{\overline{z\cdot\overline{\overline{((x\,|\,x)\,|\,(y\,|\,y))}}}\cdot\overline{\overline{((x\,|\,x)\,|\,y)}}}=\overline{\overline{z\cdot((x\,|\,x)\,|\,(y\,|\,y))}\cdot((x\,|\,x)\,|\,y)}=$$

$$=\overline{\overline{\overline{z\,|\,((x\,|\,x)\,|\,(y\,|\,y))}}\cdot((x\,|\,x)\,|\,y)}=\overline{z\,|\,((x\,|\,x)\,|\,(y\,|\,y))\cdot((x\,|\,x)\,|\,y)}=$$

$$=\overline{\overline{(z\,|\,((x\,|\,x)\,|\,(y\,|\,y)))\,|\,((x\,|\,x)\,|\,y)}}=(z\,|\,((x\,|\,x)\,|\,(y\,|\,y)))\,|\,((x\,|\,x)\,|\,y).$$

Розглянемо систему $\Sigma_4 = \{\downarrow\}$, яка називається *системою Пірса*. Ця система функціонально повна, тому що зводиться до системи Σ_2 в такий спосіб:

$$\bar{x} = x \downarrow x; \qquad\qquad x \vee y = \overline{x \downarrow y}$$

Це легко перевірити по таблиці 4.2. істинності для функції ϕ_8.

<u>Приклад 4.19.</u> Подати булеву формулу $z(x \vee y) \vee \bar{x}y$ в базисі $\Sigma_4 = \{\downarrow\}$.

Розв'язання: Скористаємося результатами приклада 4.14:

$$z(x \vee y) \vee \bar{x}y = \overline{\bar{z} \vee \overline{(x \vee y)}} \vee \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = \overline{(z \downarrow z) \vee \overline{\overline{(x \downarrow y)}}} \vee \overline{x \vee (y \downarrow y)} =$$
$$= \overline{(z \downarrow z) \vee (x \downarrow y)} \vee \overline{\overline{x \downarrow (y \downarrow y)}} = \overline{\overline{(z \downarrow z) \downarrow (x \downarrow y)}} \vee (x \downarrow (y \downarrow y)) =$$
$$= ((z \downarrow z) \downarrow (x \downarrow y)) \vee (x \downarrow (y \downarrow y)) = \overline{((z \downarrow z) \downarrow (x \downarrow y)) \downarrow (x \downarrow (y \downarrow y))} =$$
$$= (((z \downarrow z) \downarrow (x \downarrow y)) \downarrow (x \downarrow (y \downarrow y))) \downarrow (((z \downarrow z) \downarrow (x \downarrow y)) \downarrow (x \downarrow (y \downarrow y)))$$

Розглянемо систему $\Sigma_5 = \{\wedge, \oplus, 1\}$, яка називається *системою Жегалкіна*. Ця система функціонально повна, тому що зводиться до системи Σ_1 в такий спосіб: $\bar{x} = x \oplus 1$. Виразимо диз'юнкцію $x \vee y$. Згідно законів де Моргана $x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$. Тому що $\bar{x} = x \oplus 1$, $\bar{y} = y \oplus 1$, тоді

$$x \vee y = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus 1y \oplus 1x \oplus 1 \oplus 1,$$

але $1x = x,\ 1y = y$, $1 \oplus 1 = 0$ і $x \oplus 0 = x$, то остаточно маємо

$$x \vee y = xy \oplus y \oplus x.$$

<u>Приклад 4.20.</u> Подати булеву формулу $z(x \vee y) \vee \bar{x}y$ в базисі $\Sigma_5 = \{\wedge, \oplus, 1\}$.

Розв'язання: При доведенні скористаємося вже відомими співвідношеннями, а саме: $x \cdot x = x$, $x \oplus x = 0$.

$$z(x \vee y) \vee \bar{x}y = z(xy \oplus x \oplus y) \vee (x \oplus 1)y = yz(xy \oplus x \oplus y)(x \oplus 1) \oplus$$
$$\oplus z(xy \oplus x \oplus y) \oplus \oplus y(x \oplus 1) = (xyyz \oplus xyz \oplus yyz)(x \oplus 1) \oplus xyz \oplus$$
$$\oplus xz \oplus yz \oplus xy \oplus y = xxyyz \oplus xxyz \oplus xyyz \oplus xyyz \oplus xyz \oplus yyz \oplus$$

$$\oplus\, xyz \oplus xz \oplus yz \oplus xy \oplus y = xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus yz \oplus$$
$$\oplus\, xyz \oplus xz \oplus yz \oplus xy \oplus y = xy \oplus xz \oplus y\,.$$

Розглянемо систему $\Sigma_6 = \{\to, \sim\}$, яка називається *імплікаційною системою*. Ця система функціонально повна, тому що зводиться до системи Σ_2 в такий спосіб: $x \to y = \bar{x} \vee y$.

<u>Приклад 4.21.</u> Подати булеву формулу $z(x \vee y) \vee \bar{x}y$ в базисі $\Sigma_6 = \{\to, \sim\}$.

Розв'язання:

$$z(x \vee y) \vee \bar{x}y = \overline{z(x \vee y)} \to \bar{x}y = \overline{\overline{\bar{z} \vee \overline{(x \vee y)}}} \to \overline{\bar{\bar{x}} \vee \bar{y}} =$$
$$= \bar{z} \vee \overline{(x \vee y)} \to \overline{x \vee \bar{y}} = \left(z \to \overline{(x \vee y)}\right) \to \overline{(\bar{x} \to \bar{y})} =$$
$$= \left(z \to \overline{(\bar{x} \to y)}\right) \to \overline{(\bar{x} \to \bar{y})}\,.$$

Розглянемо систему $\Sigma_7 = \{\oplus, \vee, \leftrightarrow\}$. Ця система функціонально повна. Вона зводиться до системи Σ_2 в такий спосіб:

$$\bar{x} = (x \oplus x) \leftrightarrow x\,.$$

<u>Приклад 4.22.</u> Подати булеву формулу $z(x \vee y) \vee \bar{x}y$ в базисі $\Sigma_7 = \{\oplus, \vee, \leftrightarrow\}$.

Розв'язання:

$$z(x \vee y) \vee \bar{x}y = \overline{\bar{z} \vee \overline{(x \vee y)}} \vee \overline{x \vee \bar{y}} =$$
$$= \overline{((z \oplus z) \leftrightarrow z) \vee (((x \vee y) \oplus (x \vee y)) \leftrightarrow (x \vee y))} \vee \overline{x \vee ((y \oplus y) \leftrightarrow y)} =$$
$$= (((z \oplus z) \leftrightarrow z) \vee (((x \vee y) \oplus (x \vee y)) \leftrightarrow (x \vee y)) \oplus ((z \oplus z) \leftrightarrow z) \vee$$
$$\vee (((x \vee y) \oplus (x \vee y)) \leftrightarrow (x \vee y))) \leftrightarrow$$
$$\vee ((x \vee ((y \oplus y) \leftrightarrow y)) \oplus (x \vee ((y \oplus y) \leftrightarrow y))) \leftrightarrow (x \vee ((y \oplus y) \leftrightarrow y))\,.$$

Доведено, що існує 17 функціонально повних систем. Частину з них, найбільш використовувану, ми проілюстрували в прикладах, з іншими пропонуємо розібратися читачеві. Отже, повний перелік базисних систем виглядає в такий спосіб:

$\{\wedge, \sim\}$ - кон'юнктивна система Буля;

$\{\vee, \sim\}$ - диз'юнктивна система Буля;

$\{\ |\ \}$ - система Шеффера;

$\{\downarrow\}$ - система Пірса;

$\{\oplus, \wedge, 1\}$ - система Жегалкіна; $\{\oplus, \vee, 1\}$;

$\{\oplus, \wedge, \leftrightarrow\}$; $\{\oplus, \vee, \leftrightarrow\}$;

$\{\rightarrow, \sim\}$ - імплікативна система;

$\{\nrightarrow, \sim\}$ – коімплікативна система (символ $\nrightarrow$ означає: $\overline{x \rightarrow y} = x \nrightarrow y$);

$\{\nrightarrow, \leftrightarrow\}$; $\{\rightarrow, 0\}$;

$\{\rightarrow, \nrightarrow\}$; $\{\rightarrow, \oplus\}$;

$\{\nrightarrow, 1\}$; $\{\leftrightarrow, \wedge, 0\}$;

$\{\leftrightarrow, \vee, 0\}$.

Завдання:

15. Подати логічні функції, задані булевими формулами, у базисах $\Sigma_1, \Sigma_3, \Sigma_5$:

а) $x\bar{y} \vee (\bar{x} \vee z)y$; б) $y \vee xz \vee \bar{x}y$;

в) $\bar{x}\,\bar{y} \vee xy\bar{z}$; г) $x(\bar{y} \vee z) \vee \bar{z} \vee \bar{x}$;

д) $y \vee \bar{x}(\bar{y} \vee z)$; е) $\bar{y}z \vee \bar{x}y \vee xz$;

є) $(x \vee \bar{y})z \vee x\bar{z}$; ж) $\bar{x}z \vee x\bar{y}z$.

16. Подати логічні функції, задані булевими формулами, у базисах $\Sigma_2, \Sigma_4, \Sigma_6$:

а) $x \vee \bar{y}(x \vee z)$; б) $yz \vee \bar{x}yz$;

в) $y(\bar{x} \vee \bar{z}) \vee xz$; г) $xyz \vee \bar{x} \vee y$;

д) $\bar{x} \vee \bar{y} \vee x\bar{y}z$; е) $yz \vee \bar{x}(y \vee z)$;

є) $x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee \bar{x}z$; ж) $y\bar{z} \vee x \vee \bar{x}z$.

17. Довести функціональну повноту (тобто можливість подати будь-яку логічну функцію у вигляді формули, що складається з функцій тільки цієї системи) наступних систем:

а) $\{\oplus, \vee, 1\}$; б) $\{\oplus, \wedge, \leftrightarrow\}$;

в) $\{\rightarrow, 0\}$; г) $\{\rightarrow, \oplus\}$;

д) $\{\nrightarrow, \leftrightarrow\}$; е) $\{\nrightarrow, 1\}$;

є) $\{\leftrightarrow, \wedge, 0\}$; ж) $\{\leftrightarrow, \vee, 0\}$.

4.6. Похідна від булевої функції

У класичній математиці для з'ясування характеру зміни функції використовують поняття похідної. У дискретній математиці, що оперує логічними функціями n змінних, приймаючих, як і самі функції, значення 0 або 1, поняття похідної вводиться в такий спосіб.

<u>Визначення 4.17.</u> *Одиничною залишковою функцією* змінної x_i називається функція, одержувана шляхом надання змінній x_i значення одиниця:

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n\right)$$

<u>Визначення 4.18.</u> *Нульовою залишковою функцією* змінної x_i називається функція, одержувана шляхом надання змінній x_i значення нуль:

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n\right).$$

<u>Визначення 4.19.</u> *Похідна першого порядку* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ від булевої функції n змінних $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ є функція, одержувана додаванням за модулем 2 одиничних і нульових залишкових функцій змінної x_i:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n\right) \oplus f\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n\right).$$

Дотримуючись *визначення 4.19*, для знаходження похідної від булевой функції необхідно скласти одиничну і нульову залишкові функції, додати їх за модулем 2 і, використовуючи основні еквівалентності булевих функцій або таблиці істинності, по можливості спростити отримані вирази.

Приклад 4.23. Маємо функцію трьох змінних $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$. Знайти $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$.

Розв'язання:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \left(\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee 1x_2x_3\right) \oplus \left(\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee 0x_2x_3\right) = \left(\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3\right) \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \left(\bar{1}\bar{x}_3 \vee x_1 1 x_3\right) \oplus \left(\bar{0}\bar{x}_3 \vee x_1 0 x_3\right) = \left(0\bar{x}_3 \vee x_1 1 x_3\right) \oplus \left(1\bar{x}_3 \vee x_1 0 x_3\right) =$$

$$= x_1x_3 \oplus \bar{x}_3;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \left(\bar{x}_2\bar{1} \vee x_1x_2 1\right) \oplus \left(\bar{x}_2\bar{0} \vee x_1x_2 0\right) = \left(\bar{x}_2 0 \vee x_1x_2 1\right) \oplus \left(\bar{x}_2 1 \vee x_1x_2 0\right) =$$

$$= x_1x_2 \oplus \bar{x}_2.$$

Для спрощення отриманих виразів, складемо їх таблиці істинності:

x_2	x_3	$\left(\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3\right) \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Остаточно маємо: $\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2x_3$

В іншій спосіб спростити отриманий вираз можна скориставшись логічними еквівалентностями. За властивостями комутативності, констант, та згадуючи, що $x \oplus x = 0$, маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3) \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 = \left(\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\right) \vee x_2x_3 = 0 \vee x_2x_3 =$$
$$= x_2x_3.$$

Як бачимо, результат не залежить від способу розв'язання.

x_1	x_3	$x_1x_3 \oplus \bar{x}_3$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Остаточно маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 \vee \bar{x}_3$$

x_1	x_2	$x_1x_2 \oplus \bar{x}_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Остаточно маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1 \vee \bar{x}_2$$

<u>Приклад 4.24.</u> Дано функцію $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \varphi\left(x_1, x_3\right)$. Знайти $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$.

Розв'язання: За умовою змінна x_2 є фіктивною. Тому і одинична, і нульова залишкові функції змінної x_2 будуть однакові і збігатися з $\varphi\left(x_1, x_3\right)$. Оскільки $x \oplus x = 0$, одержимо

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \varphi\left(x_1, x_3\right) \oplus \varphi\left(x_1, x_3\right) = 0.$$

Отже, похідна від булевої функції за фіктивною змінною тотожно дорівнює нулю.

Похідні вищих порядків від булевої функції знаходять як і похідні першого порядку відповідно до визначення 4.19, але послідовно, де в якості наступної функції виступає вже знайдений і спрощений вираз попередньої похідної.

<u>Приклад 4.25.</u> Дано функцію трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3$. Знайти $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}$.

Розв'язання:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (1x_2 \vee \bar{1}x_3) \oplus (0x_2 \vee \bar{0}x_3) = (x_2 \vee 0) \oplus (0 \vee x_3) = x_2 \oplus x_3;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = (x_1 1 \vee \bar{x}_1x_3) \oplus (x_1 0 \vee \bar{x}_1x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_1x_3) \oplus \bar{x}_1x_3;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = (x_1x_2 \vee \bar{x}_1 1) \oplus (x_1x_2 \vee \bar{x}_1 0) = (x_1x_2 \vee \bar{x}_1) \oplus x_1x_2.$$

Спростимо отримані вирази за допомогою їх таблиць істинності:

x_2	x_3	$x_2 \oplus x_3$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Остаточно маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \bar{x}_2x_3 \vee x_2\bar{x}_3$$

x_1	x_3	$(x_1 \vee \bar{x}_1x_3) \oplus \bar{x}_1x_3$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Остаточно маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1\bar{x}_3 \vee x_1x_3$$

x_1	x_2	$(x_1x_2 \vee \bar{x}_1) \oplus x_1x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Остаточно маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2$$

Зауважимо, що спрощені за допомогою ДДНФ похідні за змінними x_2, x_3 потребують подальшого спрощення:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1\bar{x}_3 \vee x_1x_3 = x_1(\bar{x}_3 \vee x_3) = x_1 \cdot 1 = x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 = \bar{x}_1(\bar{x}_2 \vee x_2) = \bar{x}_1 \cdot 1 = \bar{x}_1$$

Знайдемо похідні вищих порядків:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 0$, тому що у функції $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ змінна x_1 фіктивна;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 1 \oplus 0 = 1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \bar{1} \oplus \bar{0} = 0 \oplus 1 = 1;$$

$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right) = 0$ (тому що похідна булевої функції за фіктивною змінною тотожно дорівнює нулю).

Завдання:

18. Знайти похідні першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ від булевих функцій трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3)$:

а) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3$; б) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3$;

в) $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$; г) $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$;

д) $f(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3$; е) $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2x_3$;

є) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$; ж) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$;

з) $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$; и) $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$.

Спростити отримані вирази.

19. Знайти похідні $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}$ від булевих функцій трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3)$:

а) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_3$; б) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_1$;

в) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \bar{x}_2 x_3$; г) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3$;

д) $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3$; е) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1$.

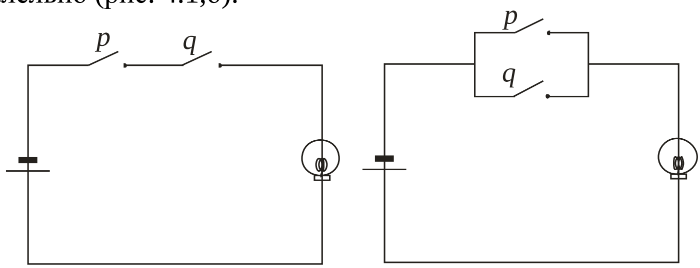
є) $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \vee x_2 x_3$; ж) $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3$;

з) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3$; и) $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \vee x_2 \bar{x}_3$.

Спростити отримані вирази.

4.7. Комутаційні схеми

В 1938 р. Клод Шеннон помітив зв'язок між таблицями істинності логічних функцій і електричних ланцюгів. Розглянемо найпростіші електричні ланцюги, що складаються із джерела живлення, електричної лампочки, і двох перемикачів, увімкнутих в електричний ланцюг послідовно (рис. 4.1,а) і паралельно (рис. 4.1,б).



(а) (б)

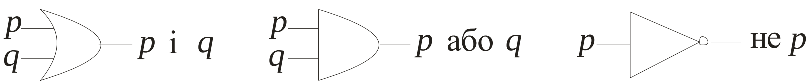
Рис. 4.1.

Привласнимо значення 1 перемикачам, коли вони з’єднані і 0, якщо роз’єднані. Електричній схемі привласнимо значення 1, коли лампочка горить (тобто через неї проходить електричний струм), і 0, коли лампочка не горить, тобто електричний струм через неї не проходить. Домовимося, що при описуванні комутаційних схем символи ($\wedge$, $\vee$, ~) замінимо символами ($\circ$, +, ’) відповідно.

Очевидно, що при послідовному з’єднанні перемикачів лампочка горить лише тоді, коли з’єднані обидва перемикачі. Тобто електричній схемі привласнюється значення 1 лише тоді, коли p і q приймають значення 1. Отже, така електрична схема відповідає висловленню $p \circ q$, а сама схема називається ***схемою логічного множення*** або логічним елементом ***p* і *q***. Цей логічний елемент надалі будемо зображувати символом, поданим на рис. 4.2,а.

При паралельному з’єднанні перемикачів лампочка горить, якщо з’єднати хоча б один перемикач. Тобто електричній схемі привласнюється значення 1 тоді, коли або p, або q приймають значення 1. Отже, така електрична схема відповідає висловленню $p+q$, а сама схема називається ***схемою логічного додавання*** або логічним елементом ***p або q***. Цей логічний елемент надалі будемо зображувати символом, поданим на рис. 4.2,б.

Припустимо, що існує схема, з одним перемикачем p, що володіє наступною властивістю: лампочка горить тоді і тільки тоді, коли перемикач розімкнуто. Тобто електричній схемі привласнюється значення 1, коли p приймає значення 0, і, навпаки, електричній схемі привласнюється значення 0, коли p приймає значення 1. Отже, така електрична схема відповідає висловленню p', а сама схема називається ***інвертором*** або логічним елементом ***не p***. Цей логічний елемент надалі будемо зображувати символом, поданим на рисунку 4.2,в.

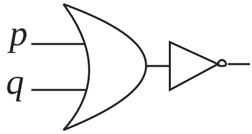


(а) (б) (в)

Рис. 4.2.

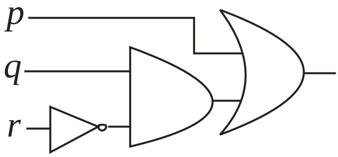
<u>Приклад 4.26.</u> Побудувати комутаційну схему, що відповідає булевій формулі $(p+q)'$.

Розв'язання: Шукана схема являє собою заперечення (інверсію) логічного додавання елементів p і q. Вона має вигляд:



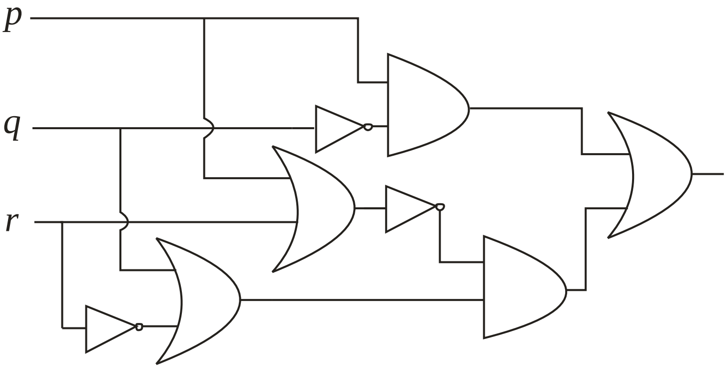
<u>Приклад 4.27.</u> Побудувати комутаційну схему, що відповідає булевому виразу $p+q\cdot r'$.

Розв'язання: Шукана схема містить з'єднання логічних елементів p і q *і не* r. Вона має вигляд:

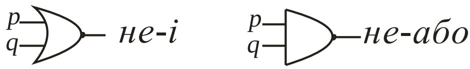


<u>Приклад 4.28.</u> Побудувати комутаційну схему, що відповідає булевій формулі $p\cdot q'+(p+r)'\cdot(q+r')$.

Розв'язання: Шукана схема має вигляд:



Звернувшись до таблиці 4.2, можемо помітити, що логічна функція ϕ_{14} - штрих Шеффера $\left(p\,|\,q\right)$ має ту ж таблицю істинності, що і функція $\left(p\cdot q\right)'$, тому її використовують як логічне зв'язування ***не-і***; а логічна функція ϕ_8 - стрілка Пірса $\left(p\downarrow q\right)$ має ту ж таблицю істинності, що і функція $\left(p+q\right)'$, тому її використовують як логічне зв'язування ***не-або***. Логічний елемент ***не-і*** будемо зображувати символом, поданим на рис. 4.3,а; а логічний елемент ***не-або*** будемо зображувати символом, поданим на рис. 4.3,б.

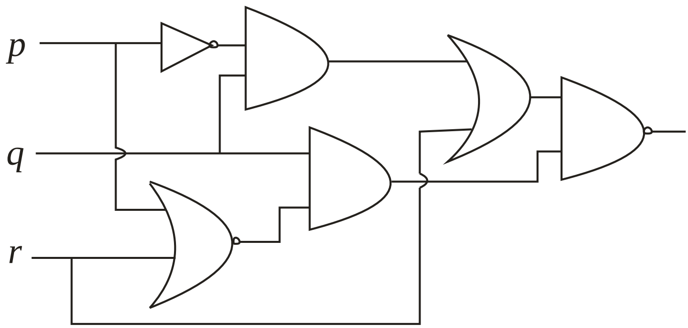


(а) (б)

Рис. 4.3.

Використання цих символів найчастіше спрощує запис комутаційних схем. Так, замість схеми, розглянутої в прикладі 4.26, можна використати символьний запис, представлений на рис. 4.3,б.

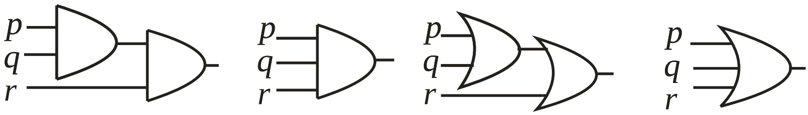
Приклад 4.29. Запишіть булеву формулу, що відповідає комутаційній схемі:



Розв'язання: Булева формула, що відповідає представленій комутаційній схемі має вигляд

$$\left(\left(p'\cdot q+r\right)\cdot\left(\left(p+r\right)'\cdot q\right)\right)'.$$

Для скорочення запису комутаційних схем можна також використати наступний символьний запис. Для позначення булевої формули $p \cdot q \cdot r$ замість схеми, представленої на рис. 4.4,а можна використати схему, представлену на рис. 4.4,б; а для запису булевої формули $p+q+r$ замість схеми на рис. 4.4,в, можна використати схему на рис. 4.4,г.

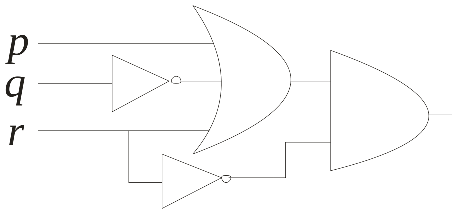


(а) (б) (в) (г)

Рис. 4.4.

<u>Приклад 4.30.</u> Побудувати комутаційну схему, що відповідає булевій формулі $\left(p+q'+r\right)\cdot r'$.

Розв'язання: Використовуючи наведені на рис. 4.4 спрощення, зобразимо шукану схему:



Завдання:

20. Побудуйте комутаційну схему, що відповідає булевій формулі:

а) $\left(p\cdot q\right)\cdot\left(q'+r\right)$; б) $\left(p\cdot q'\cdot r\right)'+\left(q'\cdot r\right)+\left(p'\cdot q\cdot r'\right)$;

в) $\left(p'+q\cdot r'\right)'$; г) $\left(p+q+r'\right)\cdot\left(r'+q\right)'$;

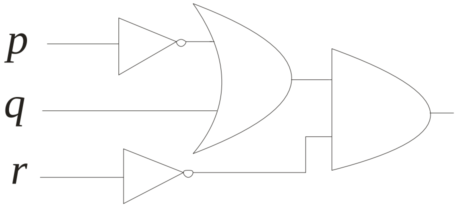
д) $\left(p+q\cdot r+r'\right)\cdot\left(q'+p\cdot r\right)$; е) $p'\cdot q'\cdot r'+\left(p\cdot q\cdot r\right)'+r$;

є) $\left(p+q'\cdot r\right)\cdot\left(q'+r'\right)$; ж) $p\cdot q+\left(q\cdot r\right)'\cdot\left(p\cdot r'\right)$;

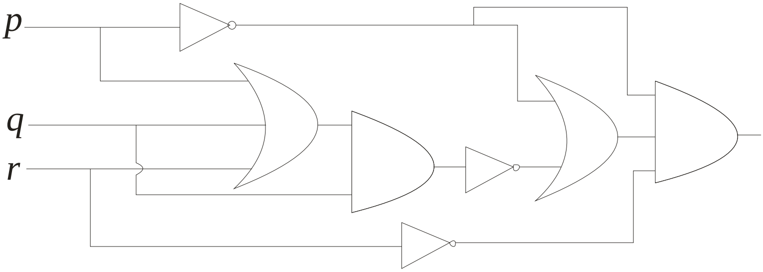
з) $p\cdot\left(q'+p'\cdot r\right)+\left(p'\cdot q+r'\right)$; и) $\left(\left(p'\cdot q+p\cdot q'\right)\cdot r+q\cdot r'\right)'$.

21. Приведіть булеву формулу, що відповідає комутаційній схемі:

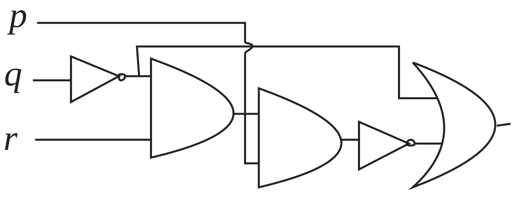
а)



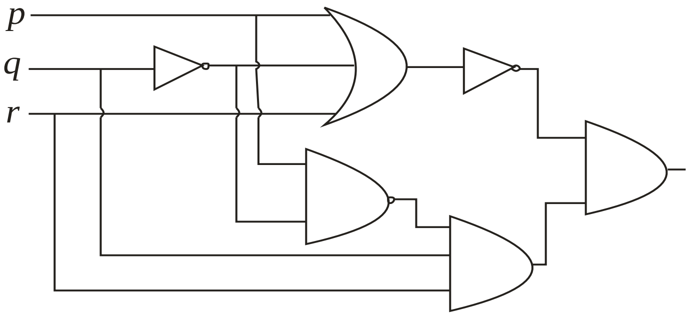
б)



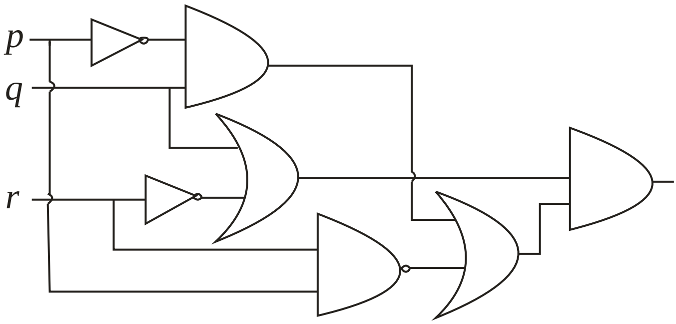
в)



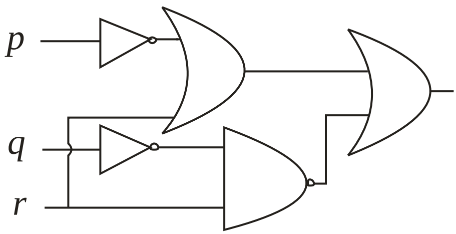
г)



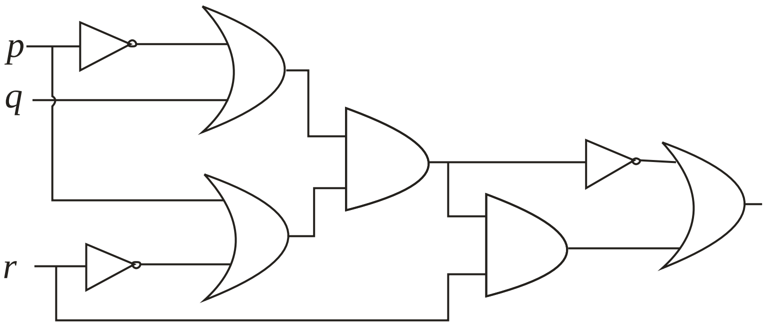
д)



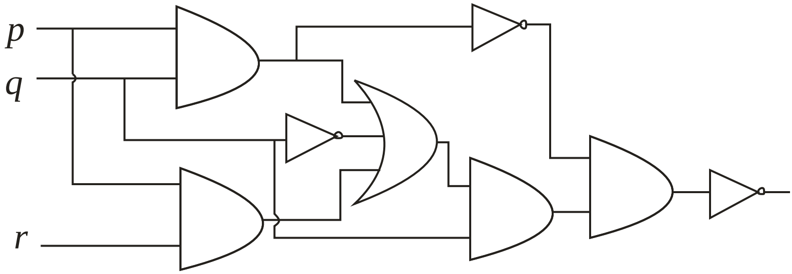
е)



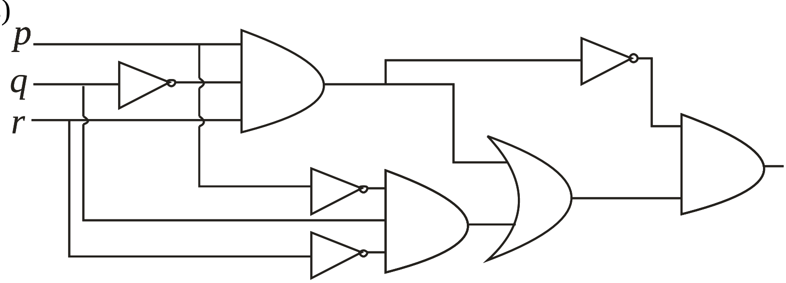
є)



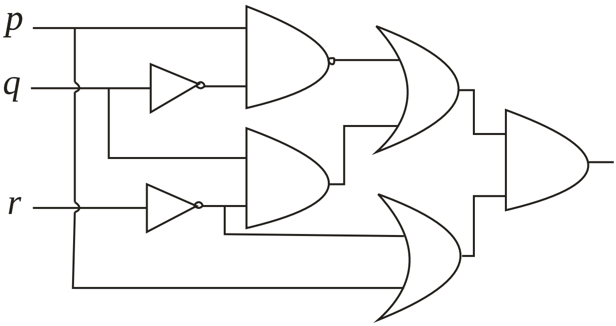
ж)



з)



и)



4.8. Карти Карно

Карти Карно були створені у 1952 році Едвардом Вейчем й удосконалені у 1953 році Морісом Карно для спрощення цифрових електронних схем. Карти Карно – графічний спосіб мінімізації мулевих функцій, який забезпечує відносну простоту роботи з великими виразами.

<u>Визначення 4.20.</u> *Карта Карно* – це таблиця, кожний елементи якої є елементарною кон'юнкцією.

Карта Карно може бути створена для будь-якої кількості змінних, але на практиці її використовують у випадках, коли змінних на більше п'яти. Вихідною інформацією для роботи з картою Карно є таблиця істинності мінімізуємої функції. Таблиця істинності містить повну інформацію про логічну функцію на всіх можливих 2^n наборах вхідних змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$. Карта Карно також містить 2^n клітинок, кожна з яких асоціюється з унікальним набором вхідних змінних. Таким чином, між таблицею істинності логічної функції та її картою Карно є взаємно однозначна відповідність, тому карту Карно можна вважати «відформатованою» таблицею істинності.

Для логічних змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ існує 2^n кон'юнкцій. Наприклад, для двох змінних p і q елементарними кон'юнкціями будуть $p \cdot q,\ p \cdot \bar{q},\ \bar{p} \cdot q,\ \bar{p} \cdot \bar{q}$. Тобто Карта Карно для двох логічних змінних буде мати вигляд, зображений на рис. 4.5,а , а на рисунку 4.5, б в прямокутниках зображені відповідні елементарні кон'юнкції.

	q	$\bar{q}$
p		
$\bar{p}$		

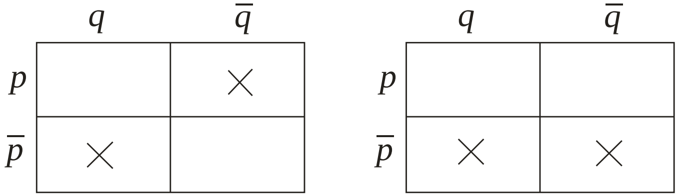
(а)

	q	$\bar{q}$
p	$p \cdot q$	$p \cdot \bar{q}$
$\bar{p}$	$\bar{p} \cdot q$	$\bar{p} \cdot \bar{q}$

(б)

Рис. 4.5.

Для запису логічної функції, представленої у диз'юнктивній нормальній формі, можна розмістити символ $\times$ у прямокутниках, які відповідають елементарним диз'юнкціям. Наприклад, логічній функції (записаній у формі ДНФ) $\bar{p}q \vee p\bar{q}$ відповідає карта Карно, зображена на рисунку 4.6,а, а логічній функції $\bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q}$ - карта Карно з рисунку 4.6,б:



(а) (б)

Рис. 4.6.

Зауважимо, що в тому випадку, коли логічній функції відповідає карта Карно з дома сусідніми в рядку або стовпці $\times$, тоді логічну функцію можна спростити, зводячи дві елементарні кон'юнкції до однієї. Тобто ДНФ буде мати на одну компоненту менше. Наприклад, логічна функція, карта Карно якої зображена на рис. 4.6,б еквівалента наступній:

$$\bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q} = \bar{p}(q \vee \bar{q}) = \bar{p} \cdot 1 = \bar{p}.$$

Карта Карно для логічної функції трьох змінних буде мати вигляд (рис. 4.7):

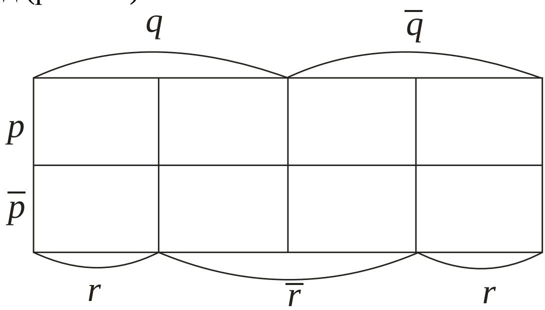


Рис. 4.7.

Звідси, логічній формулі $pqr \vee pq\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}$ буде відповідати карта Карно (рис. 4.8):

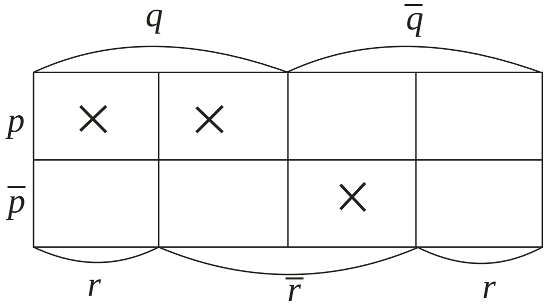
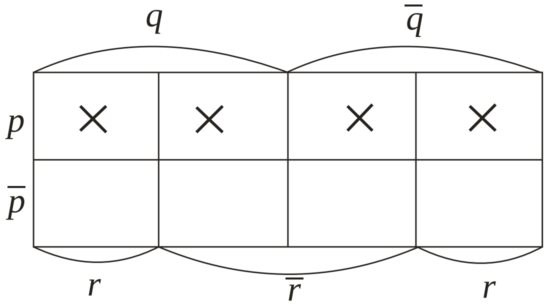


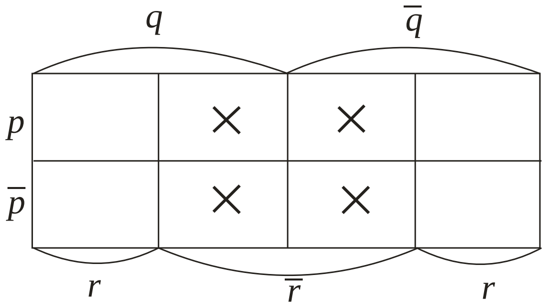
Рис. 4.8.

Як і раніше, в наслідок того, що в одному рядку два знаки × розташовані поруч, дві елементарні кон'юнкції можуть бути зведені до однієї, яка буде мати на одно з компонент p, q або r менше. В нашому випадку $pqr \vee pq\bar{r}$ зводиться до pq, а сама логічна функція приймає вигляд $pq \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}$.

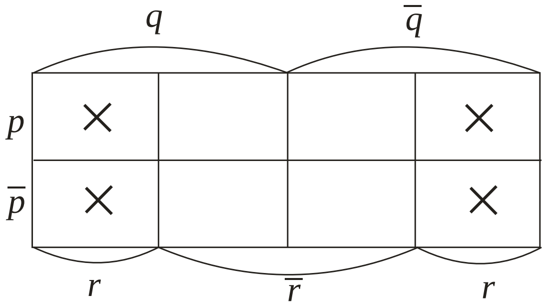
В тому випадку, коли чотири знаки × розташовані в прямокутнику поруч (см. рис. 4.9, а-в), чотири елементарні кон'юнкції можуть бути зведені до однієї.



(а)



(б)



(в)

Рис. 4.9.

Так, наприклад, у випадку, зображеному на рис. 4.9, а, чотири елементарні кон'юнкції $pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r}$ може бути зведена до p; для карти Карно з рис. 4.9, б, логічна функція $pq\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{r} \vee p\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}$ може бути записана як $\bar{r}$. Для карти Карно з рис. 4.9, в зробимо зауваження. Оскільки r з'являється на обох кінцях карти Карно, її можна «скрутити» і вважати, що чотири значка × утворюють прямокутник, тому логічна функція $pqr \vee \bar{p}qr \vee p\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}r$ зводиться до r.

Отже, алгоритм мінімізації логічних функцій (за ДНФ) має вигляд:

1. Для кожної елементарної кон'юнкції позначити на карті відповідний прямокутник.
2. Покрити знаки, використовуючи, по можливості, декілька прямокутних блоків.

3. Використати блоки, максимальні за величиною, не змінюючи кількості блоків.
4. Оцінити блоки, які відповідають логічним змінним, та об'єднати їх символом $\vee$.

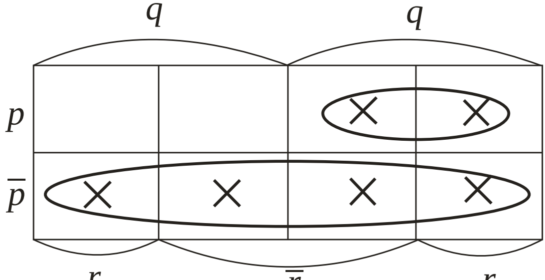
Зауваження. Склейку карт Карно можна проводити як по одиницях ($\times$), якщо необхідно отримати ДНФ, так і по нулям (порожні клітинки), якщо необхідно отримати КНФ.

Приклад 4.31. Записати таблицю істинності висловлення $\big((p \to q) \vee r\big) \to (\bar{p} \vee \bar{q})$. Спростити СДНФ, мінімізував її за допомогою карт Карно.

Розв'язання: Таблиця істинності висловлення буде мати вигляд

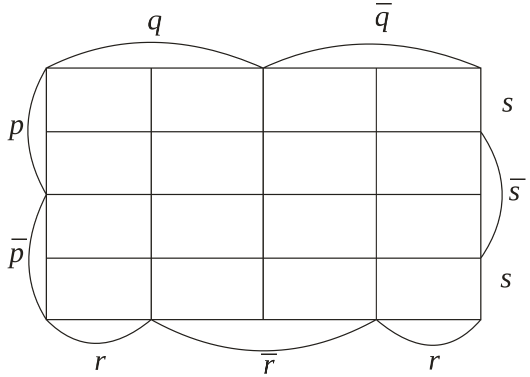
p	q	r	$p \to q$	$(p \to q) \vee r$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$\big((p \to q) \vee r\big) \to (\bar{p} \vee \bar{q})$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

Тоді СДНФ має вигляд $\bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}qr \vee p\bar{q}\bar{r} \vee p\bar{q}r$. Складемо карту Карно та об'єднаємо відповідні блоки:



Звідси мінімізована ДНФ має вигляд $\bar{p} \vee p\bar{q}$.

Карта Карно для чотирьох висловлень p, q, r, s має вигляд (рис. 4.10). Якщо розташувати відповідні значки × в карті Карно, її можна покрити восьмикратними, чотирьохкратними та двократними блоками. Двох- та чотирьохкратні блоки ми вже описували, зауважимо, що у відповідність восьмикратному блоку записують лише одну з компонент p, q, r або s.



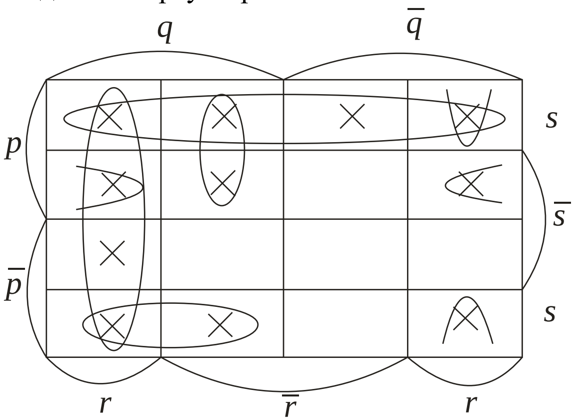
Приклад 4.32. Для висловлення «Студент отримає стипендію, якщо за умови вчасної здачі сесії хоча б два з чотирьох іспитів складе на відмінно» скласти таблицю істинності та мінімізувати її за допомогою карт Карно.

Розв'язання: Позначимо кожний з чотирьох іспитів як p, q, r, s. В таблиці істинності маємо одиниці в кожному рядку, в якому є хоча б дві одиниці з p, q, r або s.

p	q	r	s	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1

0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

СДНФ отриманої функції має вигляд $\bar{p}\bar{q}rs \vee \bar{p}q\bar{r}s \vee$ $\vee\, \bar{p}qr\bar{s} \vee \bar{p}qrs \vee p\bar{q}\bar{r}s \vee p\bar{q}r\bar{s} \vee p\bar{q}rs \vee pq\bar{r}\bar{s} \vee pq\bar{r}s \vee pqr\bar{s} \vee$ $\vee\, pqrs$. Складемо її карту Карно:



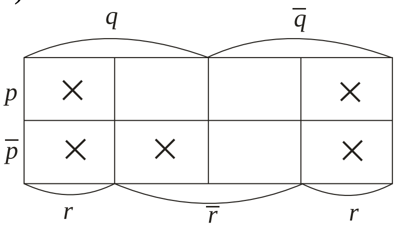
Спростимо її, об'єднавши чотирикратні та двократні блоки, як запропоновано на рисунку. Мінімізована ДНФ набуває вигляду: $ps \vee qr \vee pqr \vee \bar{p}qs \vee \bar{q}rs \vee pr\bar{s}$.

Зауважимо, що майже в кожному випадку існує декілька способів групування, тому й мінімізоване ДНФ може набувати різного вигляду.

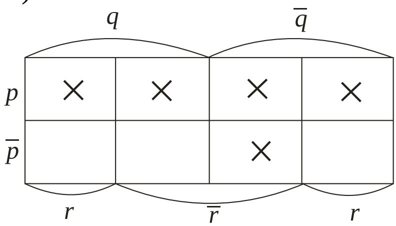
Завдання:

22. Спростити висловлення, які задані наступними картами Карно:

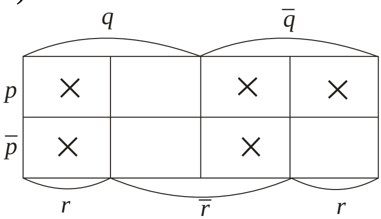
а)



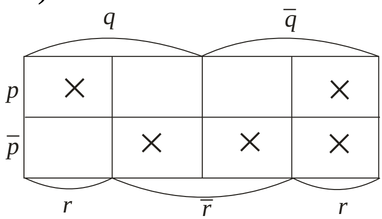
б)



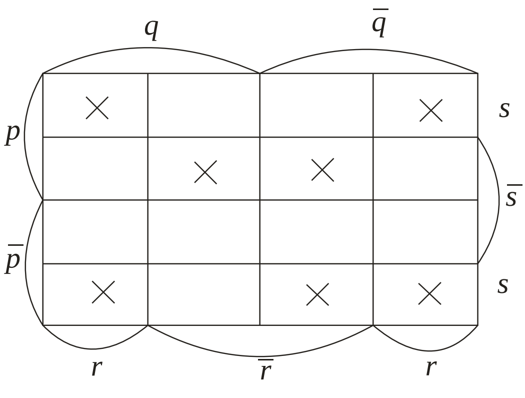
в)



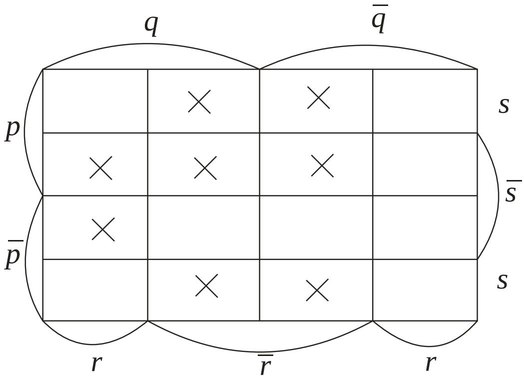
г)



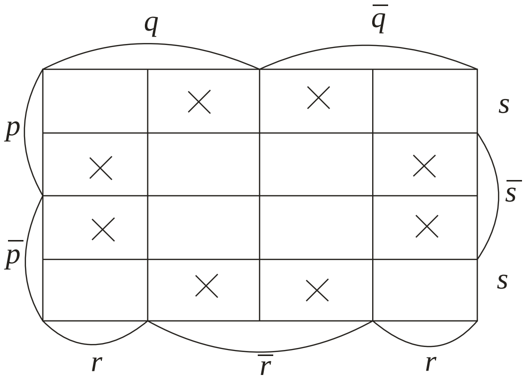
д)



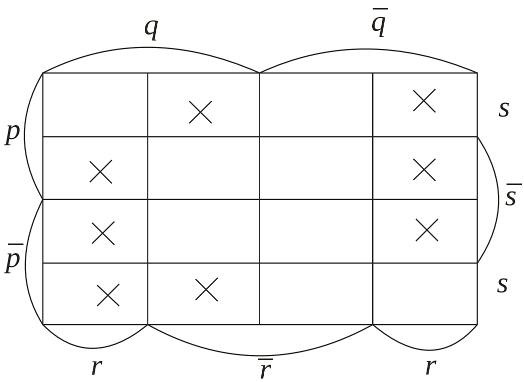
е)


q
$\bar{q}$
p
$\bar{p}$
s
$\bar{s}$
s
r
$\bar{r}$
r

є)


q
$\bar{q}$
p
$\bar{p}$
s
$\bar{s}$
s
r
$\bar{r}$
r

ж)


q
$\bar{q}$
p
$\bar{p}$
s
$\bar{s}$
s
r
$\bar{r}$
r

23. Використайте карти Карно для спрощення наступних виразів:
    а) $pqr \vee \bar{p}qr \vee pq\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{r} \vee p\bar{q}\bar{r}$;
    б) $pqr \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee pq\bar{r}$;
    в) $pqr \vee \bar{p}q\bar{r} \vee p\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}\bar{q}r$;
    г) $pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}qr$;
    д) $pqrs \vee pqr\bar{s} \vee \bar{p}qr\bar{s} \vee p\bar{q}rs \vee p\bar{q}r\bar{s} \vee \bar{p}\bar{q}r\bar{s}$;
    е) $pq\bar{r}s \vee p\bar{q}\bar{r}s \vee \bar{p}qrs \vee \bar{p}q\bar{r}s \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}s \vee \bar{p}\bar{q}rs$;
    є) $pqrs \vee \bar{p}qrs \vee p\bar{q}\bar{r}\bar{s} \vee p\bar{q}r\bar{s} \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}\bar{s} \vee \bar{p}\bar{q}r\bar{s}$;
    ж) $pq\bar{r}s \vee p\bar{q}\bar{r}s \vee pq\bar{r}\bar{s} \vee p\bar{q}\bar{r}\bar{s} \vee \bar{p}q\bar{r}\bar{s} \vee \bar{p}q\bar{r}s \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}s \vee \bar{p}qr\bar{s}$.
24. Скласти таблиці істинності для наступних висловлень та мінімізувати отриману ДНФ за допомогою карт Карно:
    а) $(\sim(p \wedge \sim r) \vee q) \rightarrow (q \vee r)$;
    б) $\sim\big(\sim(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)\big)$;
    в) $\big(p \wedge \sim(q \vee \sim r)\big) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$;
    г) $\big((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim r)\big) \rightarrow (r \rightarrow p)$;
    д) $\sim\big((p \wedge \sim q) \vee r\big) \leftrightarrow (r \rightarrow p)$;
    е) $\big(p \wedge (q \vee r)\big) \rightarrow \big((p \wedge q) \vee (p \wedge r)\big)$;
    є) $\big((p \vee r) \rightarrow q\big) \rightarrow \big((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)\big)$;
    ж) $\big((p \rightarrow q) \vee r\big) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$.

Тестове завдання до теми «Алгебра логіки»

1. Обчислити значення функції
   $f(x_1, x_2, x_3) = \psi_7\big(\psi_3(x_3, x_1), \psi_{11}(x_1, x_2)\big)$ на наборі $(1,1,0)$.

А: істинна. **Б:** хибна.

2. Скласти таблицю істинності функції, заданої формулою
   $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \oplus (x_1 \downarrow \bar{x}_3)$.

x_1	x_2	x_3	**А**	**Б**	**В**	**Г**
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1

0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

3. Логічну функцію $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1\left(\bar{x}_3 | x_2\right)$ представити у вигляді ДДНФ та ДКНФ.

А: ДДНФ: $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$.

ДКНФ: $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)\left(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3\right)\left(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3\right) \wedge$
$\wedge \left(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3\right)\left(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3\right)$.

Б: ДДНФ: $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$.

ДКНФ: $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)\left(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3\right)\left(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3\right) \wedge$
$\wedge \left(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3\right)$.

В: ДДНФ: $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1 x_2\bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$.

ДКНФ: $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)\left(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3\right)\left(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3\right) \wedge$
$\wedge \left(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3\right)\left(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3\right)$.

Г: ДДНФ: $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$.

ДКНФ: $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3\right)\left(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3\right)\left(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3\right)$.

4. Подати логічну функцію $xyz \vee \bar{x} \vee y$, задану булевою формулою, у базисах $\sum_2$, $\sum_4$, $\sum_6$.

А: $\sum_2 = \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}} \vee \bar{x} \vee y$;

$$\sum_4 = \left(\left(\left(\left(x \downarrow x\right) \downarrow \left(y \downarrow y\right)\right) \downarrow \left(\left(x \downarrow x\right) \downarrow \left(y \downarrow y\right)\right) \downarrow \left(z \downarrow z\right)\right) \downarrow$$
$$\left(\left(\left(x \downarrow x\right) \downarrow y\right) \downarrow \left(\left(x \downarrow x\right) \downarrow y\right)\right)\right) \downarrow \left(\left(\left(\left(x \downarrow x\right) \downarrow \left(y \downarrow y\right)\right) \downarrow$$
$$\left(\left(\left(x \downarrow x\right) \downarrow \left(y \downarrow y\right)\right) \downarrow \left(z \downarrow z\right)\right) \downarrow \left(\left(\left(x \downarrow x\right) \downarrow y\right)\right)\right).$$

$$\sum\nolimits_6 = (x \to (y \to z)) \to (x \to y).$$

Б: $\sum_2 = \overline{\bar{x} \vee y \vee \bar{z}} \vee \bar{x} \vee y$;

$$\sum\nolimits_4 = ((((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow (z \downarrow z)) \downarrow$$

$$(((x \downarrow x) \downarrow y) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow y))) \downarrow ((((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow$$

$$(((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow (z \downarrow z))).$$

$$\sum\nolimits_6 = (x \to (y \to \bar{z})) \to (x \to y).$$

В: $\sum_2 = \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}} \vee \bar{x} \vee y$;

$$\sum\nolimits_4 = ((((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow (z \downarrow z)) \downarrow$$

$$(((x \downarrow x) \downarrow y) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow y))) \downarrow ((((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow$$

$$(((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow (z \downarrow z)) \downarrow (((x \downarrow x) \downarrow y) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow y))).$$

$$\sum\nolimits_6 = (x \to (y \to \bar{z})) \to (y \to x).$$

Г: $\sum_2 = \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}} \vee \bar{x} \vee y$;

$$\sum\nolimits_4 = ((((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow (z \downarrow z)) \downarrow$$

$$(((x \downarrow x) \downarrow y) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow y))) \downarrow ((((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow$$

$$(((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow (z \downarrow z)) \downarrow (((x \downarrow x) \downarrow y) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow y))).$$

$$\sum\nolimits_6 = (x \to (y \to \bar{z})) \to (x \to y).$$

5. Знайти похідні першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ від булевої функції трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$.

А: $\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 x_3$; $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \bar{x}_1 x_3$; $\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1 x_2$.

Б: $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \bar{x}_2 x_3$; $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \bar{x}_1 x_3$; $\frac{\partial f}{\partial x_3} = \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$.

В: $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3$; $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \bar{x}_1 x_3$; $\frac{\partial f}{\partial x_3} = \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$.

Г: $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3$; $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \bar{x}_1 x_3$; $\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1 x_2$.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення функції алгебри логіки.
2. Дайте визначення суперпозиції функції.
3. Сформулюйте закони логіки Буля.
4. Дайте визначення нульових та одиничних наборів логічних функцій.
5. Дайте визначення довершеної диз’юнктивної нормальної форми. Сформулюйте алгоритм отримання ДДНФ.
6. Дайте визначення довершеної кон’юнктивної нормальної форми. Сформулюйте алгоритм отримання ДКНФ.
7. Дайте визначення двоїстих функцій. Сформулюйте принцип двоїстості в булевій алгебрі.
8. Дайте визначення функціонально повних систем. Наведіть приклади функціонально повних систем.
9. Сформулюйте алгоритм отримання похідної від мулевої функції. Проілюструйте прикладом.
10. Вкажіть зв'язок між таблицями істинності логічних функцій та електричними ланцюгами. Наведіть приклад побудови комутаційних схем для булевих функцій.

5. ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ

5.1. Основні визначення

Логіка предикатів являє собою розвиток, розширення логіки висловлень за рахунок використання предикатів у ролі логічних функцій. Ці функції відрізняються від булевих функцій, тому що булеві функції *однорідні* (їх область визначення і значення та ж сама – *логічна*, тобто і аргумент функції і сама функція приймає значення істинно або хибно), а предикатні функції *неоднорідні* (їх область значень – *логічна*, а область зміни аргументів – *предметна*). Логіка висловлень дозволяє описати, проаналізувати складні висловлення, установити їх істинносте значення, у той час як логіка предикатів дозволяє описати внутрішню структуру простих висловлень, що не містять логічних сполучень.

<u>Визначення 5.1.</u> *Предикатом* називається оповідальне висловлення, що містить *предметні змінні*, визначені на відповідних множинах. Заміна предметних змінних конкретними значеннями із зазначених множин обертає предикат у висловлення, що приймає значення «істинно» або «хибно».

<u>Визначення 5.2.</u> *n вимірний предикат* – це функція $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ від *n предметних змінних* $x_1, x_2, ..., x_n$, які приймають значення з деяких заданих *предметних областей* $M_1, M_2, ..., M_n$, так що $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$, …, $x_n \in M_n$, а сама функція приймає два логічних значення із множини $B = \{1.0\}$ - «істинно», «хибно». Тобто, предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ є функцією вигляду

$$P : M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \to B \qquad \text{або} \qquad P : M^n \to B.$$

Як приклад розглянемо наступну ситуацію. Нехай нам відомо, що Андрій захоплюється футболом, Ганна - плаванням, Костянтин віддає перевагу шахам, Сергій займається легкою атлетикою, а Ігор і Олена заняттям спортом віддають перевагу навчанню в музичній школі по класу фортепіано. Складемо наступні висловлення:

A - «Ганна займається спортом»;
B - «Олена займається спортом»;
C - «Сергій займається спортом».

Висловлення A і C - істинні, а висловлення B - хибно.

Замість висловлень A, B, C ми могли б увести *одномісний предикат* $P(x)$, предметна змінна x якого приймає значення із предметної області x={Андрій, Ганна, Костянтин, Сергій, Ігор, Олена}, а сама предикатна функція мала б вигляд:

$P(x)$=« x займається спортом».

Розглянемо наступні висловлення

D - «Олена займається футболом»;
E - «Костянтин займається шахами»;
F - «Сергій займається музикою».

Висловлення D і F - хибні, а висловлення E - істинно.

Замість висловлень D, E, F ми могли б увести *двомісний предикат* $P(x, y)$, предметні змінні x, y якого приймають значення із предметних областей x={Андрій, Ганна, Костянтин, Сергій, Ігор, Олена} і y={футбол, плавання, шахи, легка атлетика, музика}, а сама предикатна функція мала б вид:

$P(x, y)$=« x займається y ».

Оскільки предикати приймають тільки два істинностних значення, їх можна розглядати як висловлення і за допомогою логічних зв'язувань поєднувати в різноманітні логічні формули – *предикатні формули*. Предметом розгляду логіки предикатів саме і є встановлення істинності предикатних формул.

Прикладами предикатних формул можуть служити вирази вигляду:

$P_1(x) \to P_2(x, y)$, $\overline{P_3}(z, x, y) \wedge (P_1(y) \vee P_2(x, z))$, і т.п.

Визначення 5.2. При заміщенні предметної змінної x_i предметною постійною a_i, предикат $P(x_1,...x_i,...,x_n)$ від n змінних перетворюється в $P(x_1,...a_i,...,x_n)$ від $(n-1)$-ї змінної. При наданні конкретних значень всім предметним змінним предикатної функції отримуємо *предикатну константу* $P(a_1,\dots,a_i,\dots,\dots a_n)$, до якої можна застосовувати всі закони логіки висловлень.

Розглянемо предикат від трьох змінних $P(x,y,z)=$ « x - добуток y і z », де предметні змінні визначені на множині натуральних чисел. Нехай у процесі деяких обчислень змінна x прийняла конкретне значення $x=20$. Тоді предикат від трьох змінних перетворюється у предикат від двох змінних:

$$P(20,y,z)=P_1(y,z)=\text{«20 - добуток } y \text{ і } z\text{»}.$$

Коли $x=20$ і $y=2$, одержимо одномісний предикат від однієї змінної:

$$P(20,2,z)=P_1(2,z)=P_2(z)=\text{«20 - добуток 2 і } z\text{»}.$$

Якщо додати умову $z=10$, то вихідний предикат стає *предикатом* нульової розмірності (*константою*) або *висловленням*, яке у цьому випадку є істинним:

$$P(20,2,10)=\text{«20 - добуток 2 і 10»}=1\ ;$$

у випадку, наприклад, $z=8$ одержуємо хибне висловлення:

$$P(20,2,8)=\text{«20 - добуток 2 і 8»}=0\ .$$

Приклад 5.1. Нехай $D(x,y)$ - предикат ділення: $D(x,y)=$ « y ділиться на x »; $S(x,y,z)$ - предикат суми: $S(x,y,z)=$ « $x+y=z$ »; $\Pi(x,y,z)$ - предикат добутку: $\Pi(x,y,z)=$ « $x\cdot y=z$ ». Дати словесні формулювання наступних складних висловлень:

а) $\Pi(a,b,c)\to(D(a,c)\wedge D(b,c))$;

б) $\Pi(a,b,c)\leftrightarrow\Pi(b,a,c)$;

в) $\overline{S}(a,b,c)\wedge\overline{\Pi}(a,b,c)$.

Розв'язання:

а) «якщо c - добуток a і b, то c ділиться на a і c ділиться на b»;

б) «від перестановки співмножників a і b добуток c не змінюється» (властивість комутативності арифметичної дії множення);

в) «число c не є ні сумою, ні добутком чисел a і b».

5.2. Квантори

Функціональна природа предиката потребує введення ще одного поняття – *квантора*. Його роль спробуємо з'ясувати на наступних прикладах:

а) «Всі люди мають здатність мислити. Я людина. Отже, я маю здатність мислити»;

б) «Деякі люди зробили геніальні відкриття. Я людина. Отже, я зробив геніальне відкриття».

Якщо перше висловлення не викликає у нас питань із приводу істинності, то в другому прикладі ми почуваємо хибність висновку, тому що потрапити в число геніальних людей малоймовірно.

Ключовими словами в наших прикладах є «всі» і «деякі».

Визначення 5.3. Термін «всі x» позначається $\forall x$ і називається *квантором загальності або спільності* (символ $\forall$ - перевернена буква А англійського слова All – «всі»). Висловлення «для всіх x з M, що $P(x)$ істинно» позначається як $\forall xP(x)$.

Визначення 5.4. Термін «деякі x» або «існує хоча б одне значення x» позначається $\exists x$ і називається *квантором існування* (символ $\exists$ - перевернена буква Е англійського слова

Exist – «існувати»). Висловлення «існує такий x з M, що $P(x)$ істинно» позначається як $\exists x P(x)$.

<u>Визначення 5.5.</u> Перехід від $P(x)$ до $\forall x P(x)$ або $\exists x P(x)$ називається *зв'язуванням* змінної x, або *навішуванням квантора* на змінну x (або на предикат $P(x)$).

<u>Визначення 5.6.</u> Змінна, на яку навісили квантор, називається *зв'язаною змінної*, незв'язана квантором змінна називається *вільною*.

Навішувати квантори можна не тільки на предметні змінні, але і на багатовимірні предикати, і на будь-які логічні висловлення.

<u>Визначення 5.7.</u> Висловлення, на яке навішується квантор існування або спільності, називається *областю дії квантора*.

<u>Приклад 5.2.</u> Нехай змінна x визначена на великій кількості людей M, а $P_1(x)$ - предикат «x - має маму», $P_2(x)$ - предикат «x - має дочку». Дати словесне формулювання предикатних формул $\forall x P_1(x)$, $\exists x P_2(x)$.

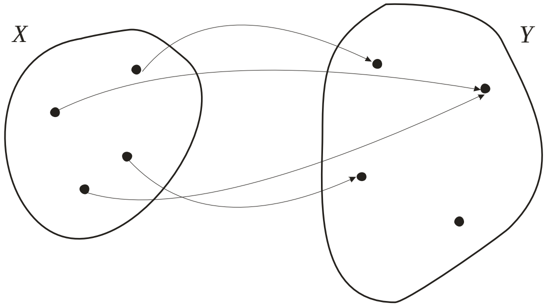
Розв'язання: $\forall x P_1(x)$ - «у кожної людини є мама»;

$\exists x P_2(x)$ - «у деяких людей є дочка».

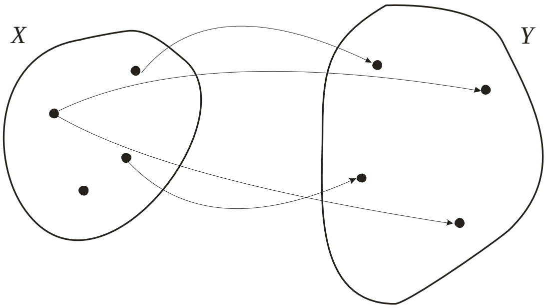
<u>Приклад 5.3.</u> Нехай змінні x, y визначені на деякій великій кількості людей M, а $P(x, y)$ - предикат «x кохає y». Розглянути всі варіанти навішування кванторів на обидві змінні і дати словесну інтерпретацію отриманих висловлень.

Розв'язання: Позначимо предикат «x кохає y» як КОХАЄ (x, y). Проілюструємо всі можливі варіанти навішення кванторів на предметні змінні Для наочності змінні x і y показані на різних множинах, хоча очевидно, що в дійсності вони повинні збігатися.

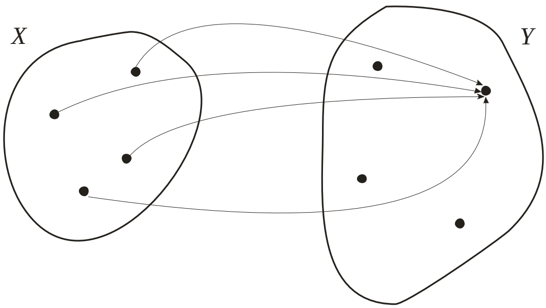
а) $\forall x \exists y$ КОХАЄ(x, y) - «для будь-якої людини x існує така людина y, яку він кохає»:



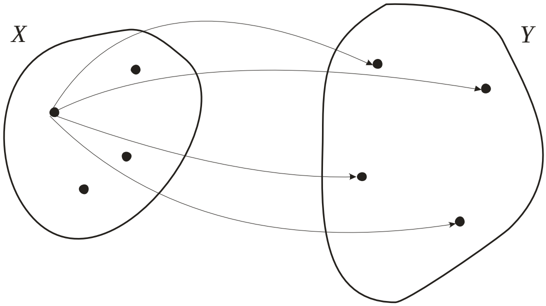
б) $\forall y \exists x$ КОХАЄ (x, y) - «для будь-якої людини y існує така людина x, що її кохає»:



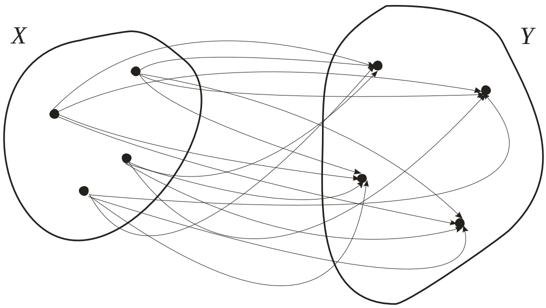
в) $\exists y \forall x$ КОХАЄ (x, y) - «існує така людина y, яку кохають всі x»:



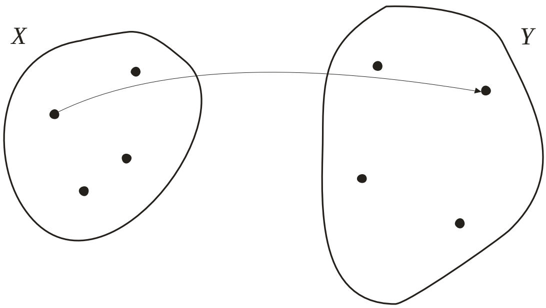
г) $\exists x \forall y$ КОХАЄ (x, y) - «існує така людина x, яка кохає всіх людей y»;



д) $\forall x \forall y$ КОХАЄ (x, y) - «всі люди x кохають всіх людей y»;



е) $\exists x \exists y$ КОХАЄ (x, y) - «існує така людина x, що кохає якусь людину y».



<u>Приклад 5.4.</u> Нехай $P(x, y)$ - предикат «x - валюта (грошова одиниця) країни y», де x належить множині грошових одиниць, а y належить множині країн. Розглянути всі варіанти навішування кванторів на обидві змінні, дати словесну інтерпретацію отриманих висловлень і визначити їхню істинність.

Розв'язання:

$\forall x P(x, y)$ - однозмінний предикат (змінне висловлення) "будь-яка грошова одиниця є валютою країни y". Дане змінне висловлення хибне.

$\forall y P(x, y)$- однозмінний предикат «для будь-якої країни y грошова одиниця x є валютою». Дане змінне висловлення хибне.

$\exists x P(x, y)$- однозмінний предикат «існує така грошова одиниця x, що є валютою країни y». Дане змінне висловлення істинно для будь-якого значення вільної змінної y.

$\exists y P(x, y)$- однозмінний предикат «існує така країна y, валютою якої є грошова одиниця x». Дане змінне висловлення істинно для будь-якого значення вільної змінної x.

Далі йдуть предикати нульової розмірності: $\forall x \forall y P(x, y)$, $\forall y \forall x P(x, y)$ - «валютою будь-якої країни є будь-яка грошова одиниця». Дане висловлення є хибним.

$\exists x \forall y P(x, y)$ - висловлення «існує така грошова одиниця x, що є валютою будь-якої країни». Дане висловлення є хибним.

$\forall y \exists x P(x, y)$ - висловлення «у будь-якої країни існує своя грошова одиниця». Дане висловлення істинно.

$\forall x \exists y P(x, y)$ - висловлення «для будь-якої грошової одиниці існує така країна, в якій вона є валютою». Дане висловлення істинно.

$\exists y \forall x P(x, y)$ - висловлення «існує така країна, валютою якої є всі існуючі грошові одиниці». Дане висловлення хибне.

$\exists x \exists y P(x, y)$, $\exists y \exists x P(x, y)$ - висловлення «існує така грошова одиниця x і існує така країна y, що x є валютою країни y». Дані висловлення істинні.

<u>Приклад 5.5.</u> Нехай $P(x, y)$ заданий на множині $M = \{a, b, c\}$ таблицею.

x	a	a	a	b	b	b	c	c	c
y	a	b	c	a	b	c	a	b	c
$P(x, y)$	1	0	0	1	0	0	1	0	0

Визначити істинність наступних формул: $\forall x P(x, a)$, $\exists y P(b, y)$, $\exists x \forall y P(x, y)$.

Розв'язання: Формула $\forall x P(x, a)$ - істинна, тому що для кожного x із множини $M = \{a, b, c\}$ прямує наступне:

$$P(a, a) = P(b, a) = P(c, a) = 1.$$

Формула $\exists y P(b, y)$ - істинна, тому що існує такий набір змінних, при якому змінне висловлення $P(b, a) = 1$.

Формула $\exists x \forall y P(x, y)$ - хибна, тому що не існує такого значення x, щоб для всіх y висловлення було б істинне $P(x, y) = 1$.

<u>Приклад 5.6.</u> Визначити, чи є дані висловлення формулами логіки предикатів. Якщо так, то визначити вільні і зв'язані змінні:

а) $\forall x \exists y \exists z P(x, y, z, u)$;

б) $\forall x \forall y P_1(x, y, z) \leftrightarrow \exists x P_2(x, y, z)$;

г) $\exists x \forall z (P_1(x, y, z) \to (P_2(x, z, y) \vee P_1(y, z, x)))$.

Розв'язання:

а) дане висловлення є формулою логіки предикатів. Змінні x, y, z - зв'язані, а змінна u - вільна.;

б) дане висловлення не є формулою логіки предикатів, тому що змінна y в першій частині формули $\forall x \forall y P_1(x, y, z)$ є зв'язаною, а в другій − $\exists x P_2(x, y, z)$ є вільною;

в) дане висловлення є формулою логіки предикатів, тому що змінні x, z зв'язані, а змінна y - вільна.

5.3. Операції над предикатами і кванторами. Еквівалентні співвідношення

Розглянемо предикатні функції, що мають тільки зв'язані змінні, тобто функції, аргументи яких зв'язані або квантором спільності, або квантором існування.

Висловлення «для всіх x властивість P істинна» $(\forall x P(x))$ еквівалентне висловленню «кон'юнкція всіх значень предикатної функції дорівнює 1». Тобто, квантор спільності означає кон'юнкцію всіх значень предикатної функції:

$$\forall x P(x) = P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge \ldots$$

Висловлення «існує хоча б одне таке значення x, що властивість P істинна» $(\exists x P(x))$ еквівалентне висловленню «диз'юнкція всіх значень предикатної функції дорівнює 1». Тобто, квантор існування означає диз'юнкцію всіх значень предикатної функції:

$$\exists x P(x) = P(x_1) \vee P(x_2) \vee P(x_3) \vee \ldots$$

Квантори існування і спільності можна заперечувати і визначати один через інший використовуючи правила де Моргана:

$$\overline{\forall} xP(x) = \overline{P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge \ldots} = \overline{P}(x_1) \vee \overline{P}(x_2) \vee \overline{P}(x_3) \vee \ldots =$$
$$= \exists x\overline{P}(x);$$

$$\overline{\exists} xP(x) = \overline{P(x_1) \vee P(x_2) \vee P(x_3) \vee \ldots} = \overline{P}(x_1) \wedge \overline{P}(x_2) \wedge \overline{P}(x_3) \wedge \ldots =$$
$$= \forall x\overline{P}(x).$$

Звідси прямує, що:

$$\overline{\forall} x\overline{P}(x) = \exists xP(x); \qquad \overline{\exists} x\overline{P}(x) = \forall xP(x).$$

Проілюструємо висловлене вище на наступному прикладі.

<u>Приклад 5.7.</u> Нехай $P(x)$ - предикат « x - парне число», визначений на множині натуральних чисел. Виконати заперечення кванторів існування і спільності, дати словесну інтерпретацію отриманих висловлень.

Розв'язання:

За умовою предикатна змінна приймає значення $x = \{1,2,3,4,5,6,7,8,\ldots\}$, звідси предикатна функція приймає як істинні, так і хибні значення, а саме: $P(1) = 0$, $P(2) = 1$, $P(3) = 0$, $P(4) = 1$, $P(5) = 0$ …

Переконаємося в справедливості формули для заперечення квантора спільності: $\overline{\forall} xP(x) = 1$ «не всі x - парні числа» $=$ «існують такі x, які є непарними числами» $= \exists x\overline{P}(x) = 1$.

Обидва висловлення істинні.

Переконаємося в справедливості формули для заперечення квантора існування: $\overline{\exists} xP(x) = 0$ «немає жодного x, яке було б парним числом» = «усі x є непарними числами» $=\forall x\overline{P}(x)=0$.

Обидва висловлення хибні.

Кон'юнктивна природа квантора спільності і диз'юнктивна природа квантора існування з погляду *відношення еквівалентності* накладають певні обмеження на використання їх разом з диз'юнкцією і кон'юнкцією як логічними операціями.

Легко переконатися в справедливості тотожностей:

$$\forall x(A(x)\wedge B(x))=\forall xA(x)\wedge \forall xB(x);$$

$$\exists x(A(x)\vee B(x))=\exists xA(x)\vee \exists xB(x).$$

<u>Приклад 5.8.</u> Довести тотожність

$$\forall x(A(x)\wedge B(x))=\forall xA(x)\wedge \forall xB(x).$$

Розв'язання: Нехай для визначеності предметна область предикатів складається із двох елементів a і b (у загальному випадку для областей, що містять n елементів, представлені докази будуть такими ж, але більш громіздкими). Тоді:

$$\forall x(A(x)\wedge B(x))=(A(a)\wedge B(a))\wedge (A(b)\wedge B(b))=$$

$$=(A(a)\wedge A(b))\wedge (B(a)\wedge B(b))=\forall xA(x)\wedge \forall xB(x).$$

Друга тотожність доводиться аналогічно (перевірити самостійно).

Якщо кожний із предикатів замінити висловленням, то справедливими виявляються наступні співвідношення:

$$\forall x(A\vee B(x))=A\vee \forall xB(x); \qquad \exists x(A\wedge B(x))=A\wedge \exists xB(x).$$

<u>Приклад 5.9.</u> Довести тотожність

$$\exists x(A\wedge B(x))=A\wedge \exists xB(x).$$

Розв'язання: Доведемо другу тотожність, надавши можливість довести першу тотожність читачеві самостійно. За властивістю дистрибутивності маємо

$$\exists x(A\wedge B(x))=(A\wedge B(a))\vee(A\wedge B(b))=$$
$$=A\wedge(B(a)\vee B(b))=A\wedge\exists xB(x).$$

За відомою нам формулою, за якою імплікація може бути подана через диз'юнкцію, вірне співвідношення:

$$\exists x(A(x)\to B(x))=\forall xA(x)\to\exists xB(x).$$

Доведемо його:

$$\exists x(A(x)\to B(x))=\exists x(\overline{A}(x)\vee B(x))=(\overline{A}(a)\vee B(a))\vee(\overline{A}(b)\vee B(b))=$$
$$=(\overline{A}(a)\vee\overline{A}(b))\vee(B(a)\vee B(b))=\exists x\overline{A}(x)\vee\exists xB(x)=\overline{\forall}xA(x)\vee\exists xB(x)=$$
$$=\forall xA(x)\to\exists xB(x).$$

Щоб зберегти відношення еквівалентності (при винесенні за дужки квантора існування при кон’юнкції і квантора спільності при диз'юнкції), коли дані два різних предикати, вводять додаткову змінну:

$$\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)=\exists xA(x)\wedge\exists yB(y)=\exists x\exists y(A(x)\wedge B(y))=$$
$$=(A(a)\vee A(b))\wedge(B(a)\vee B(b)).$$

Аналогічно діють і у випадках:

$$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)=\forall x\forall y(A(x)\vee B(y));$$

$$\exists xA(x)\to\forall xB(x)=\forall x\forall y(A(x)\to B(y));$$

$$\exists xA(x)\vee\forall xB(x)=\exists x\forall y(A(x)\vee B(y))=\forall x\exists y(A(y)\vee B(x)).$$

В останньому з наведених співвідношень відзначимо наступне: квантори $\forall$ і $\exists$ можна переставляти місцями, тільки якщо вони незалежні, тобто відносяться до незалежних однозмінних предикатів!

Що до двозмінних предикатів, то за допомогою законів комутативності і асоціативності для кон’юнкції і диз'юнкції, можна довести справедливість наступних тотожностей:

$$\forall x\forall yP(x,y)=\forall y\forall xP(x,y);$$
$$\exists x\exists yP(x,y)=\exists y\exists xP(x,y).$$

<u>Приклад 5.10.</u> Довести тотожність

$$\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y).$$

Розв'язання:

$$\forall x \forall y P(x, y) = \forall x (P(x, a) \wedge P(x, b)) =$$
$$= (P(a, a) \wedge P(b, a)) \wedge (P(a, b) \wedge P(b, b)) =$$
$$= (P(a, a) \wedge P(a, b)) \wedge (P(b, a) \wedge P(b, b)) =$$
$$= \forall y (P(a, y) \wedge P(b, y)) = \forall y \forall x P(x, y)$$

Завдання:

1. Записати (використовуючи прийняті позначення S, Π, E для предикатів суми, добутку і рівності відповідно) предикатною формулою пропозицію, що надає для довільних $a, b, c \in N$ наступні властивості арифметики натуральних чисел:
   а) комутативність додавання;
   б) комутативність множення;
   в) асоціативність додавання;
   г) асоціативність множення;
   д) дистрибутивність множення щодо додавання;
   е) транзитивність рівності.
2. Записати предикатною формулою наступні пропозиції:
   а) «кожна людина прагне знайти свою половину»;
   б) «деякі люди мають витончений смак»;
   в) «для всякого потенційного поля ротор дорівнює нулю»;
   г) «сума довжин двох сторін трикутника завжди менше довжини його третьої сторони»;
   д) «всі сторони ромба рівні»;
   е) «будь-яка людина має батька».
3. Розглянути всі можливі варіанти навішення кванторів на предикат $P(x, y)$ - «книга x з бібліотеки y». Дати словесні формулювання отриманих висловлень і визначити їх істинність.

4. Нехай $S(x, y, z)$ і $\Pi(x, y, z)$ - предикати суми і добутку відповідно, визначенні:
   - на множині натуральних чисел з нулем N_0;
   - на множині всіх цілих чисел Z.

   З'ясувати, який зміст мають наступні формули, і на якої (з перерахованих) множині вони істинні:

   а) $\exists y \forall x S(x, y, z)$; б) $\exists y \forall x \Pi(x, y, z)$;

   в) $\forall x \forall z \exists y S(x, y, z)$; г) $\forall x \forall z \exists y \Pi(x, y, z)$.

5. Визначити, чи є дані вирази формулами логіки предикатів. Якщо так, то визначити вільні і зв'язані змінні:

   а) $\forall x \exists u \exists z P(x, y, z, u, v)$;

   б) $\exists y P_1(x, y, z) \wedge \forall y P_2(x, y, z)$;

   в) $\exists x \forall z P_3(x, y, z) \to \exists z P_1(x, y, z)$;

   г) $\forall x \forall u (P_5(x, y) \vee P_6(z, u))$;

   д) $\exists y P_2(x, y, z) \leftrightarrow \forall x \forall y P_6(x, y)$;

   е) $\forall x \forall y P_1(x, y, z) \vee \exists x \exists z P_1(x, y, z)$;

   є) $\exists y \forall x \forall z P(x, y, z)$.

6. Нехай предикат $P(x, y)$ задано на множині $M = \{a, b, c\}$ таблицею (по варіантах):

а)	x	a	a	a	b	b	b	c	c	c
	y	a	b	c	a	b	c	a	b	c
	$P(x, y)$	1	0	1	0	1	0	1	0	1

б)	x	a	a	a	b	b	b	c	c	c
	y	a	b	c	a	b	c	a	b	c
	$P(x, y)$	0	0	1	0	0	1	0	0	1

в)	x	a	a	a	b	b	b	c	c	c
	y	a	b	c	a	b	c	a	b	c
	$P(x, y)$	1	1	1	0	0	0	1	1	1

г)	x	a	a	a	b	b	b	c	c	c
	y	a	b	c	a	b	c	a	b	c
	$P(x,y)$	0	1	0	0	1	1	1	0	0

Визначити істинність наступних формул: $\forall xP(x,a)$, $\exists xP(x,a)$, $\forall xP(x,b)$, $\exists xP(x,b)$, $\forall yP(a,y)$, $\exists yP(a,y)$, $\forall yP(b,y)$, $\exists yP(b,y)$, $\forall x\forall yP(x,y)$, $\exists x\exists yP(x,y)$, $\forall x\exists yP(x,y)$, $\exists x\forall yP(x,y)$, $\forall y\exists xP(x,y)$, $\exists y\forall xP(x,y)$.

7. Довести тотожності:
   а) $\exists x(A(x)\vee B(x)) = \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$;
   б) $\forall x(A\vee B(x)) = A\vee\forall xB(x)$;
   в) $\exists x\exists yP(x,y) = \exists y\exists xP(x,y)$.

5.4. Логічна інтерпретація формул логіки предикатів

Як і при вивченні логіки висловлень, нас буде цікавити істинностне значення формул логіки предикатів. При логічній інтерпретації формул логіки предикатів можливі наступні ситуації: формула може бути здійсненною, загальнозначущою або суперечливою. Дамо відповідні визначення.

Визначення 5.8. Формула $F(x_1,...,x_n)$ називається *здійсненною в області* M, якщо існує в даній області такий набір констант $(a_1,...,a_n)$ відповідних змінним $(x_1,...,x_n)$, що формула $F(a_1,...,a_n)$ стає істинним висловленням. Формула $F(x_1,...,x_n)$ називається просто *здійсненною*, якщо існує така область M, де формула здійсненна.

Визначення 5.9. Формула $F(x_1,...,x_n)$ називається *тотожно істинною (ТІ) в області* M, якщо вона здійсненна в області M при будь-яких підстановках констант. Якщо формула $F(x_1,...,x_n)$ тотожно істинна в будь-яких областях M, то її називають *загальнозначущою*.

Визначення 5.10. Формула $F(x_1,...,x_n)$ називається *тотожно помилковою (ТП) в області* M, якщо формула нездійсненна в області M при будь-яких підстановках констант. Якщо формула $F(x_1,...,x_n)$ тотожно помилкова в будь-яких областях M, то її називають *суперечливою*.

Задача розпізнання загальнозначущості формул логіки предикатів набагато складніша, ніж у логіки висловлень, тому що в загальному випадку потужність множини областей M нескінченна $(|M|=\infty)$, і метод переліку можливих ситуацій тут недієздатний. Тобто у логіки предикатів виникає *проблема можливості* розв'язання: необхідність указати ефективний спосіб установлення загально значущості формул, тобто їх здійсненності у всіх областях M. У загальному випадку ця проблема в логіки предикатів *нерозв'язна*!

Теорема Черча. У логіки предикатів не існує алгоритму, який для будь-якої формули встановлює, загальнозначуща вона чи ні.

Зауваження. В окремих випадках ця проблема має розв'язок. Наприклад, для формул логіки предикатів, що містять тільки однозмінні предикати, такий алгоритм існує.

Розглянемо інтерпретацію формул логіки предикатів не на всіх існуючих областях M, а на конкретних моделях $\mathcal{M}$.

Визначення 5.11. *Моделлю* $\mathcal{M}(M;P_1,...,P_k)$ у логіки предикатів називається множина M - основна множина моделі $\mathcal{M}$, разом із заданою на ньому сукупністю предикатів $\Sigma=\{P_1,...,P_k\}$, яку звуть сигнатурою моделі $\mathcal{M}$.

Наприклад, модель $\mathcal{M}=\{N,S,\Pi,E\}$ називають арифметикою натуральних чисел. Її основна множина N -

множина натуральних чисел, а сигнатура включає предикати суми S, добутку Π і рівності E .

Аналогічно визначенням 5.8 - 5.10 виявляють здійсненність, загально значимість і суперечливість формул на моделі $\mathcal{M}$.

Приклад 5.11. Визначити істинність, хибність або здійсненність на моделі $\mathcal{M}=\{N,S,\Pi,E\}$ наступних формул:

а) $\exists xS(x,x,y)$;

б) $\exists yS(x,x,y)$;

в) $(S(x,y,z)\wedge S(y,x,u))\rightarrow E(z,u)$.

Розв'язання:

а) формула $\exists xS(x,x,y)$ - здійсненна на моделі $\mathcal{M}$, тому що виявляє існування натурального значення $x=\dfrac{y}{2}$. Очевидно, що дана формула істинна тільки при підстановках парних натуральних чисел замість вільної змінної y, і хибна при підстановці непарних чисел. Наприклад, формула $\exists xS(x,x,6)$ - істинна (у цьому випадку $x=3$), а формула $\exists xS(x,x,9)$ - хибна (тому що $x+x=2x$ і не може в області натуральних чисел бути непарним числом);

б) формула $\exists yS(x,x,y)$ - ТІ на моделі $\mathcal{M}$, тому що виявляє існування суми двох натуральних чисел. При підстановці будь-якого числа $\in N$ замість вільної змінної x формула $\exists yS(x,x,y)$ істинна: $\exists yS(5,5,y)$ (тут $y=10$), $\exists yS(2,2,y)$ (тут $y=4$);

в) формула $(S(x,y,z)\wedge S(y,x,u))\rightarrow E(z,u)$ ТІ на моделі $\mathcal{M}$, тому що виявляє тільки одне значення суми двох чисел. Дійсно, якщо $x+y=z$ і $y+x=u$, то $z=u$. Для підтвердження цього твердження розглянемо різні варіанти наборів чисел, значення предикатів і формули в цілому на цих наборах (x, y, z, u):

$(2,3,5,5)$:

$$S(2,3,5) \wedge S(3,2,5) \to E(5,5) = 1 \wedge 1 \to 1 = 1 \to 1 = 1$$ - істинна;

$(2,3,5,6)$:

$$S(2,3,5) \wedge S(3,2,6) \to E(5,6) = 1 \wedge 0 \to 0 = 0 \to 1 = 1$$ - істинна;

$(2,3,7,6)$:

$$S(2,3,7) \wedge S(3,2,6) \to E(7,6) = 0 \wedge 0 \to 0 = 0 \to 0 = 1$$ - істинна;

$(2,3,7,5)$:

$$S(2,3,7) \wedge S(3,2,5) \to E(7,5) = 0 \wedge 1 \to 0 = 0 \to 0 = 1$$ - істинна.

Приклад 5.12. Визначити істинність, хибність або здійсненність наступних формул:
а) $\exists y P(x, x, y)$; б) $\forall x\left(P(x) \vee \overline{P}(x)\right)$; в) $\exists x\left(P(x) \wedge \overline{P}(x)\right)$
.

Розв'язання:

а) формула $\exists y P(x, x, y)$ - здійсненна. Наприклад, на моделі арифметики натуральних чисел $\mathcal{M} = \{N, S, \Pi, E\}$. Якщо трактувати предикат P як предикат суми S, то формула істинна при $x = \frac{y}{2}$ - натуральне число, і хибна – у протилежному випадку. Якщо трактувати предикат P як предикат добутку Π, то формула істинна при $x = \sqrt{y}$ - натуральне число, і хибно – у протилежному випадку.

б) формула $\forall x\left(P(x) \vee \overline{P}(x)\right)$ - ТІ формула, тому що вона істинна в будь-якій області M . Довести це легко, згадавши про кон'юнктивну природу квантора спільності. При підстановці будь-якої константи a з будь-якої області M у формулу предикат $P(a)$ може приймати або істинне - $P(a)=1$, або хибне - $P(a)=0$ значення. Тоді

$$\forall x\left(P(a)\vee \overline{P}(a)\right)=\left(1\vee \overline{1}\right)\wedge\left(0\vee \overline{0}\right)=(1\vee 0)\wedge(0\vee 1)=1\wedge 1=1.$$

в) формула $\exists x\left(P(x)\wedge \overline{P}(x)\right)$ -*ТП*-формула, тому що вона помилкова в будь-якій області M. Довести це легко, згадавши про диз'юнктивну природу квантора існування. При підстановці будь-якої константи a з будь-якої області M у формулу предикат $P(a)$ може приймати або істинне - $P(a)=1$, або хибне - $P(a)=0$ значення. Тоді

$$\exists x\left(P(a)\wedge \overline{P}(a)\right)=\left(1\wedge \overline{1}\right)\vee\left(0\wedge \overline{0}\right)=(1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)=0\vee 0=0.$$

Приклад 5.13. Нехай M - множина чисел, що належать інтервалу $[1,7)$, а $Q(x,y)$ - предикат порядку «$x\le y$». Визначити, при яких значеннях предметних змінних у заданій інтерпретації наступні формули є істинними:

а) $\forall yQ(x,y)$; б) $\exists y\forall xQ(x,y)$; в) $\forall x\exists yQ(x,y)$.

Розв'язання:

а) при $x=1$ формула приймає значення «1» – істинно, тому що для кожного y із зазначеного інтервалу виконується нерівність $1\le y$. При $x\ne 1$ формула приймає значення «0» – хибно, тому що, наприклад, для $y=1$ і $x>1$ нерівність $x\le y$ не виконується;

б) логічна інтерпретація заданої предикатної формули наступна: «існує таке число y на інтервалі $[1,7)$, що більше будь-якого числа x із цього інтервалу». На даному інтервалі формула приймає значення «0», тому що на ньому немає найбільшого числа, адже $7\notin[1,7)$;

в) логічна інтерпретація заданої предикатної формули наступна: «для будь-якого числа x з інтервалу $[1,7)$ існує число y, для якого виконується нерівність $x \le y$ ». Очевидно, що дана формула істинна.

При доведенні істинності формул логіки предикатів можна також використовувати метод доведення від супротивного, який докладно було розглянуто у логіки висловлень. Будемо припускати, що предикатна формула хибна, тобто не для всіх предметних змінних вона істинна. Тоді існує такий набір констант замість предметних змінних, підстановка яких у формулу робить її хибною. Якщо прийняте припущення щодо хибності формули призвело до протиріччя, то формула - істинна. Проілюструємо використання цього прийому на прикладі.

<u>Приклад 5.14.</u> Довести істинність формули $\forall x\left(\overline{P}(x) \to (P(x) \to Q(x))\right)$ методом від супротивного:.

Розв'язання: Припустимо, що формула хибна. Тобто не для всіх x вона істинна. Тоді повинна існувати така константа a, підстановка якої у формулу робить її хибною, тобто $\overline{P}(a) \to (P(a) \to Q(a)) = 0$. З таблиці істинності для імплікації, таке можливо тільки якщо її ліва частина дорівнює 1, а права – 0, тобто $\overline{P}(a) = 1$, а $P(a) \to Q(a) = 0$. З першої рівності одержуємо $P(a) = 0$, а виконання другої знову вимагає рівності одиниці лівої частини імплікації $P(a) = 1$ і рівності нулю правої - $Q(a) = 0$. Але $P(a)$ не може одночасно дорівнювати і нулю і одиниці. Прийшли до протиріччя. Отже, формула $\forall x\left(\overline{P}(x) \to (P(x) \to Q(x))\right)$ - істинна.

Завдання:

8. Визначити істинність, хибність або здійсненність на множині натуральних чисел з нулем N_0 наступних формул:

а) $\forall y S(x, y, y)$; б) $\forall y \Pi(x, y, y)$;
в) $\exists x S(x, y, y)$; г) $\exists z S(x, z, y)$;
д) $\exists z \Pi(x, z, y)$; е) $\forall y Q(x, y)$;
є) $\exists y \forall x Q(x, y)$; ж) $\forall x \exists y Q(x, y)$.

Тут прийняті позначення: $S(x, y, z)$ - предикат суми «$x + y = z$»; $\Pi(x, y, z)$ - предикат добутку «$x \cdot y = z$»; $E(x, y)$ - предикат рівності «$x = y$»; $D(x, y)$ - предикат подільності «x ділиться на y»; $Q(x, y)$ - предикат порядку «$x \le y$».

9. Визначити істинність, хибність або здійсненність на множині натуральних чисел з нулем N_0 наступних формул:
   а) $\forall x \forall y \forall z \forall u ((\Pi(x, y, z) \wedge \Pi(y, x, u)) \to E(z, u))$;
   б) $\exists y (\Pi(x, x, y) \to S(x, x, y))$;
   в) $\exists y ((S(x, y, z) \vee E(x, z)) \to Q(x, z))$;
   г) $\forall x \forall y \forall z ((\Pi(x, y, z) \wedge \overline{E}(x, y)) \to S(x, y, z))$;
   д) $\exists x \Pi(x, y, z) \to D(z, y)$;
   е) $\exists x \Pi(x, y, x) \to \forall y \Pi(x, y, x)$;
   є) $\exists x S(x, y, y) \to \forall x S(x, y, y)$.

   (Позначення згідно завдання 1).
10. У заданій інтерпретації визначити, при яких значеннях вільної змінної формули $\forall x P(x, y)$, $\forall y P(x, y)$ є істинними. Визначити значення формул $\forall x \exists y P(x, y)$, $\exists y \forall x P(x, y)$, $\forall y \exists x P(x, y)$, $\exists x \forall y P(x, y)$:
    а) $M = (1,3)$, $P(x, y)$: «$x \le y$»;
    б) $M = [1,3)$, $P(x, y)$: «$x < y$»;
    в) $M = [1,4]$, $P(x, y)$: «$x > y$»;
    г) $M = (1,4]$, $P(x, y)$: «$x \ge y$»;
    д) $M = (2,5)$, $P(x, y)$: «$x = y$»;
    е) $M = [2,5]$, $P(x, y)$: «$x \ne y$».

11. На множині $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ визначені предикати суми і добутку. При яких значеннях змінної x формули $F(x)$ істинні в M :

а) $\exists y S(y,y,x)$:	б) $\forall y \exists z \overline{\Pi}(x,y,z)$;
в) $\forall y \exists z \overline{S}(x,y,z)$;	г) $\forall y \overline{\Pi}(x,x,y)$;
д) $\overline{\exists} y S(y,y,x)$;	е) $\exists y \exists z \Pi(x,y,z)$;
є) $\forall y \overline{S}(y,y,x)$;	ж) $\exists y \forall z \Pi(x,y,z)$;
з) $\exists y \forall z \overline{S}(z,y,x)$;	и) $\exists y \Pi(y,y,x)$.

12. Для $F(x)$ із задачі 4 знайти значення формул: $\forall x F(x) \to \exists x F(x)$, $\exists x F(x) \leftrightarrow \forall x F(x)$. З'ясувати, значення яких з них можна було вказати без обчислень?
13. Довести істинність формул методом від супротивного:
    а) $\forall x((P(x) \wedge Q(x)) \to P(x))$;
    б) $\forall x((P(x) \to Q(x)) \vee (P(x) \to Q(x)))$;
    в) $\forall x((P(x) \to Q(x)) \vee (Q(x) \to P(x)))$;
    г) $\forall x(P(x) \to (Q(x) \to (P(x) \wedge Q(x))))$;
    д) $\forall x((\overline{P}(x) \to \overline{Q}(x)) \to (P(x) \to Q(x)))$;
    е) $\forall x((P(x) \to Q(x)) \to ((P(x) \to \overline{Q}(x)) \to \overline{P}(x)))$.

5.5. Префіксна нормальна форма

<u>Визначення 5.12.</u> *Префіксною нормальною формою (ПНФ)* називається формула, що містить тільки операції диз'юнкції, кон'юнкції і заперечення; причому символ заперечення знаходиться тільки перед символом предикатів. Тобто *ПНФ* має вигляд: $Q_1x_1Q_2x_2...Q_nx_nF$, де $Q_1x_1Q_2x_2...Q_nx_n$ - квантори, а F - формула.

У логіки предикатів для будь-якої формули існує еквівалентна їй префіксна нормальна форма.

Раніше (в п. 5.3) нами виписані основні еквівалентні співвідношення логіки предикатів, причому частина з них доведена, а доведення інших ми надали можливість провести читачеві самостійно. Випишемо і систематизуємо їх, для зручності використання останніх при одержанні *ПНФ* будь-якої предикатної формули. Отже, основні еквівалентні співвідношення наступні:

$$\overline{\exists} xP(x) = \forall x\overline{P}(x); \quad (1)$$

$$\overline{\forall} xP(x) = \exists x\overline{P}(x); \quad (2)$$

$$\forall x(P_1(x) \wedge P_2(x)) = \forall xP_1(x) \wedge \forall xP_2(x); \quad (3)$$

$$\exists x(P_1(x) \vee P_2(x)) = \exists xP_1(x) \vee \exists xP_2(x); \quad (4)$$

$$\forall x\forall yP(x, y) = \forall y\forall xP(x, y); \quad (5)$$

$$\exists x\exists yP(x, y) = \exists y\exists xP(x, y); \quad (6)$$

$$\forall x(A \vee P(x)) = A \vee \forall xP(x); \quad (7)$$

$$\forall x(A \wedge P(x)) = A \wedge \forall xP(x); \quad (8)$$

$$\exists x(A \vee P(x)) = A \vee \exists xP(x); \quad (9)$$

$$\exists x(A \wedge P(x)) = A \wedge \exists xP(x); \quad (10)$$

$$\exists xP_1(x) \wedge \exists yP_2(y) = \exists x\exists y(P_1(x) \wedge P_2(y)); \quad (11)$$

$$\forall xP_1(x) \vee \forall yP_2(y) = \forall x\forall y(P_1(x) \vee P_2(y)). \quad (12)$$

Процедура одержання *ПНФ* виглядає наступним чином:

а) використовуючи тавтології для виключення зв'язок (п. 3.3), необхідно замінити операції імплікації і еквівалентності на диз'юнкцію, кон’юнкцію і заперечення;

б) використовуючи правила подвійного заперечення, правила де Моргана і еквівалентні співвідношення (1), (2), подати формулу логіки предикатів таким чином, щоб символи заперечення розташовувалися безпосередньо перед символами предикатів;

в) внаслідок того що квантор існування не дистрибутивний відносно кон’юнкції, а квантор спільності - щодо диз'юнкції, то для складних формул, що містять вирази вигляду $\forall xP_1(x) \wedge \forall xP_2(x)$ або $\exists xP_1(x) \vee \exists xP_2(x)$, необхідно ввести нові змінні, які б дозволили використати еквівалентності (7) - (10);

г) використовуючи всі представлені еквівалентні співвідношення, записати предикатні формули у вигляді *ПНФ*.

Приклад 5.15. Одержати *ПНФ* предикатної формули

$$\overline{\forall x \exists y P_1(x, y) \vee \forall x \exists y P_2(x, y)}.$$

Розв'язання: Скориставшись правилом де Моргана одержимо

$$\overline{\forall x \exists y P_1(x, y) \vee \forall x \exists y P_2(x, y)} = \overline{\forall} x \exists y P_1(x, y) \wedge \overline{\forall} x \exists y P_2(x, y),$$

використовуючи еквівалентні співвідношення (1) і (2), змістимо символи заперечення безпосередньо до символів предикатів

$$\overline{\forall} x \exists y P_1(x, y) \wedge \overline{\forall} x \exists y P_2(x, y) = \exists x \overline{\exists} y P_1(x, y) \wedge \exists x \overline{\exists} y P_2(x, y) =$$
$$= \exists x \forall y \overline{P_1}(x, y) \wedge \exists x \forall y \overline{P_2}(x, y).$$

В наслідок того, що квантор існування не дистрибутивний відносно кон'юнкції, введемо нову змінну в другому предикаті:

$$\exists x \forall y \overline{P_1}(x, y) \wedge \exists x \forall y \overline{P_2}(x, y) = \exists x \forall y \overline{P_1}(x, y) \wedge \exists z \forall y \overline{P_2}(z, y),$$

скориставшись еквівалентністю (11), одержимо:

$$\exists x \forall y \overline{P_1}(x, y) \wedge \exists z \forall y \overline{P_2}(z, y) = \exists x \exists z \left(\forall y \overline{P_1}(x, y) \wedge \forall y \overline{P_2}(z, y)\right).$$

З того, що квантор спільності дистрибутивний відносно кон'юнкції, остаточно маємо:

$$\exists x \exists z \left(\forall y \overline{P_1}(x, y) \wedge \forall y \overline{P_2}(z, y)\right) = \exists x \exists z \forall y \left(\overline{P_1}(x, y) \wedge \overline{P_2}(z, y)\right).$$

Отже, *ПНФ* вихідної предикатної формули має вигляд:

$$\overline{\forall x \exists y P_1(x, y) \vee \forall x \exists y P_2(x, y)} = \exists x \exists z \forall y \left(\overline{P_1}(x, y) \wedge \overline{P_2}(z, y)\right).$$

Приклад 5.16. Одержати *ПНФ* предикатної формули

$$\left(\overline{\exists} y P_1(y) \to \overline{\forall} x \forall y P_2(x, y)\right) \to \forall z P_3(z).$$

Розв'язання: Використовуючи тавтології для виключення зв'язок, замінимо імплікації

$$\left(\overline{\exists} yP_1(y) \rightarrow \overline{\forall} x\forall yP_2(x,y)\right) \rightarrow \forall zP_3(z) =$$
$$= \overline{\left(\overline{\overline{\exists}} yP_1(y) \vee \overline{\forall} x\forall yP_2(x,y)\right)} \vee \forall zP_3(z),$$

за правилом подвійного заперечення маємо

$$\overline{\left(\overline{\overline{\exists}} yP_1(y) \vee \overline{\forall} x\forall yP_2(x,y)\right)} \vee \forall zP_3(z) =$$
$$= \overline{\left(\exists yP_1(y) \vee \overline{\forall} x\forall yP_2(x,y)\right)} \vee \forall zP_3(z).$$

Скориставшись законами де Моргана, одержимо

$$\overline{\left(\exists yP_1(y) \vee \overline{\forall} x\forall yP_2(x,y)\right)} \vee \forall zP_3(z) =$$
$$= \left(\overline{\exists} yP_1(y) \wedge \overline{\overline{\forall}} x\forall yP_2(x,y)\right) \vee \forall zP_3(z) =$$
$$= \left(\overline{\exists} yP_1(y) \wedge \forall x\forall yP_2(x,y)\right) \vee \forall zP_3(z).$$

Відповідно до еквівалентності (1), перемістимо символ заперечення:

$$\left(\overline{\exists} yP_1(y) \wedge \forall x\forall yP_2(x,y)\right) \vee \forall zP_3(z) =$$
$$= \left(\forall y\overline{P}_1(y) \wedge \forall x\forall yP_2(x,y)\right) \vee \forall zP_3(z).$$

Формула (2) дозволяє переписати вираз у вигляді:

$$\left(\forall y\overline{P}_1(y) \wedge \forall x\forall yP_2(x,y)\right) \vee \forall zP_3(z) =$$
$$= \forall y\left(\overline{P}_1(y) \wedge \forall xP_2(x,y)\right) \vee \forall zP_3(z).$$

За формулою (8) маємо:

$$\forall y\left(\overline{P}_1(y) \wedge \forall xP_2(x,y)\right) \vee \forall zP_3(z) = \forall y\forall x\left(\overline{P}_1(y) \wedge P_2(x,y)\right) \vee \forall zP_3(z).$$

Еквівалентне співвідношення (5) дозволяє міняти місцями квантори спільності:

$$\forall y\forall x\left(\overline{P}_1(y) \wedge P_2(x,y)\right) \vee \forall zP_3(z) = \forall x\forall y\left(\overline{P}_1(y) \wedge P_2(x,y)\right) \vee \forall zP_3(z).$$

Використовуючи (12), остаточно одержимо:

$$\forall x\forall y\left(\overline{P}_1(y) \wedge P_2(x,y)\right) \vee \forall zP_3(z) = \forall x\forall y\forall z\left(\overline{P}_1(y) \wedge P_2(x,y) \vee P_3(z)\right).$$

Завдання:

14. Які із предикатних формул представлені у вигляді *ПНФ*:

а) $\forall x \exists y (A(x) \to B(y))$; б) $A(x) \vee \forall y \overline{B}(y)$;

в) $\forall x \forall y (A(x) \vee B(y))$; г) $\exists x A(x) \wedge \overline{B}(y)$;

д) $\exists x \forall y \overline{(A(x) \wedge B(y))}$; е) $\forall x (A(x) \vee B(y))$;

є) $\forall y (\overline{\exists} A(x) \vee \overline{B}(y))$; ж) $\forall y \exists x (A(x) \leftrightarrow \overline{B}(y))$;

з) $\overline{\exists} y \exists x (A(x) \vee B(y))$; и) $\forall x \exists y (\overline{A}(x) \wedge \overline{B}(y))$.

15. Одержати *ПНФ* наступних предикатних формул:

а) $\exists x \overline{P_1}(x) \to P_2(y)$; б) $\exists y \overline{(P_1(x) \leftrightarrow P_2(y))}$;

в) $\overline{\forall} x P_1(x) \leftrightarrow P_2(y)$; г) $\overline{\exists} x P_1(x) \to P_2(y)$;

д) $\overline{P_1(x) \wedge \exists y P_2(y)}$; е) $\exists y P_2(y) \wedge \exists y P_1(y)$.

16. Одержати *ПНФ* наступних предикатних формул:

а) $\forall x \forall y P_1(x, y) \to \forall x \exists y P_2(x, y)$;

б) $\exists x P_1(x) \to \exists x \exists y P_2(x, y)$;

в) $\forall y P_1(y) \to \forall y \overline{\exists} x P_2(x, y)$;

г) $\forall x P_1(x) \leftrightarrow \exists y \forall x P_2(x, y)$;

д) $\exists x \forall y P_1(x, y) \to \forall x \exists y P_2(x, y)$;

е) $\forall x P_1(x) \vee \forall y P_2(x, y) \leftrightarrow \overline{\forall} x \exists y \forall z P_3(x, y, z)$.

17. Одержати ПНФ наступних предикатних формул:

а) $(\forall x \overline{\exists} y P_1(x, y) \wedge \forall x P_2(x)) \to \forall y \exists z P_3(y, z)$;

б) $(\overline{\exists} y P_1(y) \to \overline{\forall} x \forall y P_2(x, y)) \to \overline{\forall} z P_3(z)$;

в) $(\forall x \forall z P_1(x, y, z) \vee \forall x P_2(x)) \to \overline{\forall} y \exists z P_3(y, z)$;

г) $\overline{(\forall x \forall y \forall z \overline{P_1}(x, y, z) \to \exists x \exists z P_2(x, z))} \wedge \forall y \forall z P_3(y, z)$;

д) $\overline{(\forall x P_1(x) \vee \overline{\forall} x \exists y P_2(x, y))} \to \exists x \overline{\exists} y \forall z P_3(x, y, z)$;

е) $(\forall x \exists y \forall z P_1(x, y, z) \vee \overline{\forall} z P_2(z)) \to \forall x \overline{\forall} y P_3(x, y)$.

Тестове завдання до теми «Логіка предикатів»

1. Нехай $P(x,y)$ заданий на множині $M=\{a,b,c\}$ таблицею.

x	a	a	a	b	b	b	c	c	c
y	a	b	c	a	b	c	a	b	c
$P(x,y)$	0	1	1	0	1	0	1	1	1

Визначити істинність наступних формул: $\forall x P(x,a)$, $\exists y P(b,y)$, $\exists x \forall y P(x,y)$.

А: хибна, істинна, хибна.
Б: істинна, хибна, хибна.
В: істинні, істинна, істинна.
Г: хибна, істинна, істинна.

2. Яка з предикатних формул представлена у вигляді ПНФ:

А: $\exists x \forall y \big(A(x) \leftrightarrow B(y)\big)$.
Б: $\exists x \forall y \big(A(x) \vee \bar{B}(y)\big)$.
В: $\exists x \forall y \overline{\big(A(x) \wedge B(y)\big)}$.
Г: $\exists x \forall y \big(A(x) \wedge B(y)\big)$.

3. Одержати ПНФ предикатної формули
$\forall x \forall y P_1(x,y) \leftrightarrow \exists x P_2(x)$.

А: $\exists x \exists y \forall x \forall y \forall z \Big(\big(\bar{P}_1(x,y) \vee P_2(x)\big) \wedge \big(P_1(x,y) \vee \bar{P}_2(z)\big)\Big)$.

Б: $\exists x \exists y \forall x \forall y \Big(\big(\bar{P}_1(x,y) \vee P_2(x)\big) \wedge \big(P_1(x,y) \vee \bar{P}_2(x)\big)\Big)$.

В: $\exists x \exists y \forall x \forall y \forall z \Big(\big(\overline{P_1(x,y) \vee P_2(x)}\big) \wedge \big(P_1(x,y) \vee P_2(z)\big)\Big)$.

Г: $\exists x \exists y \forall x \forall y \forall z \big(P_1(x,y) \vee P_2(x)\big)$.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення предиката. Описати області визначення та значень n-вимірного предиката.
2. Що таке квантор? Приведіть приклади навішування кванторів на змінні предикату. Дайте словесну інтерпретацію отриманих висловлень.
3. Дайте визначення здійсненної формули логіки предикатів.
4. Дайте визначення загальнозначущої формули логіки предикатів.
5. Дайте визначення суперечливої формули логіки предикатів.
6. Дайте визначення префіксної нормальної форми.
7. Сформулюйте алгоритм отримання префіксної нормальної форми.

6. ТЕОРІЯ ГРАФІВ

Графічне подання розв’язання різних прикладних задач нам добре відомо. До графічних подань у широкому змісті можуть бути віднесені малюнки, креслення, графіки, діаграми, блок-схеми і т.п. З їхньою допомогою наочно ілюструються залежності процесів і явищ, логічні, структурні, причинно-наслідкові і інші взаємозв'язки. Однак теорія графів має свою власну проблематику. У дискретній математиці граф є найважливішим математичним поняттям. На основі теорії графів будуються моделі різноманітних задач, таких як маршрутизації, розподілу ресурсів, дискретної оптимізації, сіткового планування і керування, аналізу і проектування організаційних структур, аналізу процесу їх функціонування і багато іншого.

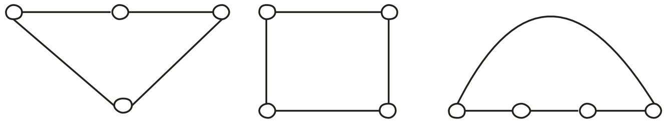
6.1. Основні визначення

<u>Визначення 6.1.</u> *Графом* G називається сукупність двох множин V точок і E ліній, між якими визначене *відношення інциденстності*, причому, кожен елемент $e \in E$ інцидентен рівно двом елементам $v', v'' \in V$. Елементи множини V називаються *вершинами*, а елементи множини E - *ребрами* графа. Вершини і ребра графа називаються його *елементами*, тому найчастіше пишуть $v \in G$ і $e \in G$.

<u>Визначення 6.2.</u> Якщо ребро e з’єднує вершини v', v'', тоді вони є для нього кінцевими точками і називаються *суміжними* вершинами. Два ребра називаються *суміжними*, якщо вони інцидентні до загальної вершини.

Необхідно відзначити, що при зображенні графа не всі деталі малюнка мають значення. Так, наприклад, несуттєвою є довжина і кривизна ребер, взаємне розташування вершин на площині. Принциповим є тільки відношення інцидентності.

<u>Приклад 6.1.</u> Моделі, зображені на рисунках 6.1 а, б, в, з погляду теорії графів однакові.

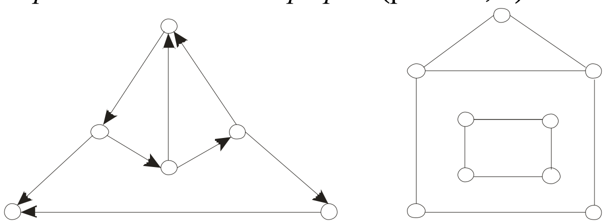


а б в

Рис. 6.1.

У деяких задачах інцидентні ребру вершини нерівноправні, а розглядаються в певному порядку. Тоді кожному ребру можна приписати напрямок від першої інцидентної вершини до другої.

Визначення 6.3. Напрямлені ребра називають *орієнтованими ребрами* або *дугами*, перша по черзі вершина називається *початком* дуги, а друга – її *кінцем*. Граф, що містить напрямлені ребра, називається *орієнтованим* графом або *орграфом* (рис. 6.2, а), а граф, що не містить напрямлених ребер – *неорієнтованим* або *н-графом* (рис. 6.2, б).



(а) (б)

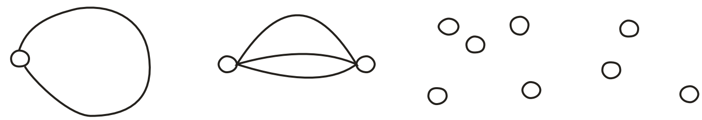
Рис. 6.2.

Визначення 6.4. Ребро, що з'єднує деяку вершину саму із собою, називається *петлею* (рис. 6.3,а).

Визначення 6.5. Ребра, інцидентні до однієї і тієї ж вершини, називаються *кратними* (рис. 6.3,б). Граф, що містить кратні ребра, називається *мультиграфом*, а граф, що містить кратні ребра і петлі – *псевдографом*.

Визначення 6.6. Граф називається *кінцевим*, якщо множина його вершин і ребер звичайна.

Множина ребер графа може бути порожньою (рис. 6.3,в). Такий граф називається *порожній* або *пустий*.



(а) (б) (в)

Рис. 6.3.

<u>Визначення 6.7.</u> Граф без петель і кратних ребер називається *повним*, якщо кожна пара його вершин з'єднана ребром. Повний граф з n вершинами позначається K_n.

<u>Приклад 6.2.</u> На рисунку 6.4 зображені повні графи K_2, K_3, K_4, K_5 і K_6 відповідно:

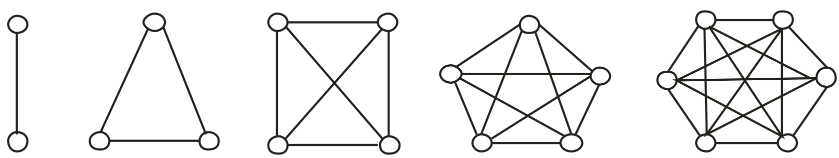
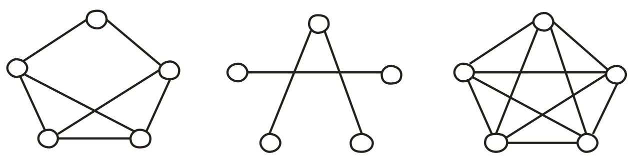


Рис. 6.4.

<u>Визначення 6.8.</u> *Доповненням графа* G називається граф $\overline{G}$, що має ті ж вершини, що і граф G і тільки ті ребра, які необхідно додати до графа G, щоб він став повним.

<u>Приклад 6.3.</u> Доповненням графа G, зображеного на рис. 6.5,а є граф $\overline{G}$, зображений на рисунку 6.5,б. Для порівняння, повний граф зображений на рисунку 6.5,в.



(а) (б) (в)

Рис. 6.5.

Визначення 6.9. *Степенем вершини* v $(\deg v)$ називається кількість ребер, інцидентних цій вершині. Вершина степеня 0 називається *ізольованою*. У графі з петлями петля дає внесок в 2 одиниці у степінь вершини.

Теорема 6.1. Сума степенів вершин графа завжди парна: $\sum_{v \in G} \deg v = 2m$, де m - кількість ребер графа.

Доведення: З того що кожне ребро графа має два кінці прямує, що степінь кожного кінця збільшується на 1 за рахунок одного ребра. Тобто у суму степенів всіх вершин кожне ребро вносить 2 одиниці. Отже, сума ступенів вершин повинна у два рази перевищувати число ребер, тобто бути парною.

Теорема 6.2. У будь-якому графі кількість вершин непарного степеня парна.

Доведення: Доведемо від оберненого. Припустимо, є непарне число вершин непарного степеня. Сума вершин парного степеня - парна. Сума степенів всіх вершин графа є сума вершин непарного і парного степенів. Така сума завжди є число непарне. Тобто сума степенів всіх вершин графа буде непарною. Це суперечить умові теореми 6.1. Прийшли до протиріччя. Отже, кількість вершин непарного степеня в будь-якому графі парна.

Справедливість теорем 6.1 і 6.2 можна проілюструвати на наступному прикладі.

Приклад 6.4. Визначити степені вершин графа, зображеного на рисунку 6.6.

Розв'язання: $\deg v_1 = 2$; $\deg v_2 = 2$; $\deg v_3 = 3$; $\deg v_4 = 4$; $\deg v_5 = 3$; $\deg v_6 = 4$.

$$\sum_{v \in G} \deg v = 2+2+3+4+3+4 = 18 = 2 \cdot 9 = 2m.$$

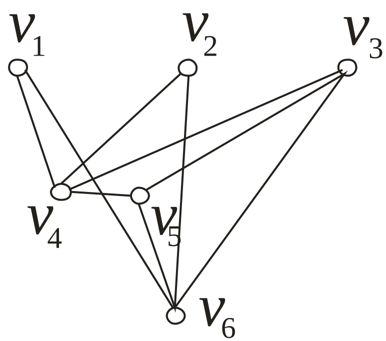


Рис. 6.6.

У розглянутому графі дев'ять ребер, а вершин непарного степеня дві: v_3; v_5.

<u>Визначення 6.10.</u> Для орієнтованого графа визначаються дві степені вершин: $\deg v'$ - кількість ребер, що виходять із вершини v і $\deg v''$ - кількість ребер, що входять у вершину v. Петля дає внесок по одиниці в обидві степені.

В орграфі суми степенів всіх вершин $\deg v'$ і $\deg v''$ рівні між собою і дорівнюють кількості ребер m цього графа: $\sum\limits_{v \in G} \deg v' = \sum\limits_{v \in G} \deg v'' = m$.

<u>Приклад 6.5.</u> Визначити степені вершин орграфа, зображеного на рисунку 6.7.

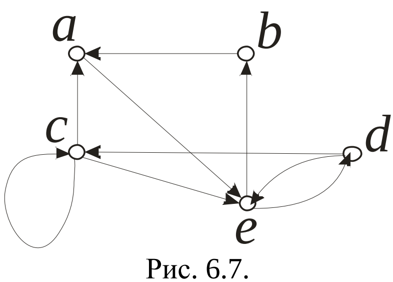


Рис. 6.7.

Розв'язання:

$\deg a' = 1$, $\deg b' = 2$; $\deg c' = 3$; $\deg d' = 2$; $\deg e' = 2$;

$\deg a'' = 2$, $\deg b'' = 1$; $\deg c'' = 2$; $\deg d'' = 2$; $\deg e'' = 3$;

$$\sum_{v \in G} \deg v' = 1 + 2 + 3 + 2 + 2 = 10 = \sum_{v \in G} \deg v'' = 2 + 1 + 2 + 2 + 3 = 10 = m$$

Визначення 6.11. Граф G' називається *підграфом* графа G, якщо кожна вершина і кожне ребро графа G' є відповідно вершиною і ребром графа G.

Визначення 6.12. Граф G' називається *остов (каркас)* графа G, якщо містить всі його вершини. За визначенням 6.11 він також є *підграфом* графа G.

Приклад 6.6. На рисунку 6.8 (а,б,в) зображені підграфи графа, зображеного на рисунку 6.8,г. Причому підграф (рис. 6.8,б) є його каркасом.

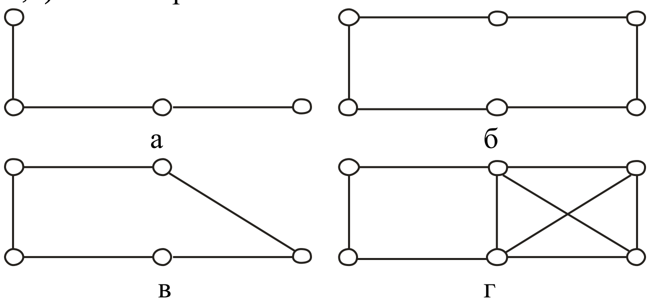


Рис. 6.8.

Один і той же граф можна зображувати по-різному. Різним образом можна розташовувати вершини на площині, і ребра можна зображувати не тільки відрізками прямих (різної довжини) але й дугами. Тому порівнюючи графи, будемо спиратися на наступні визначення.

Визначення 6.13. Графи G_1 і G_2 *рівні*, якщо множини їхніх вершин і ребер, визначених через пари інцидентних їм вершин, збігаються. Наприклад, графи, зображені на рисунку 6.1 рівні.

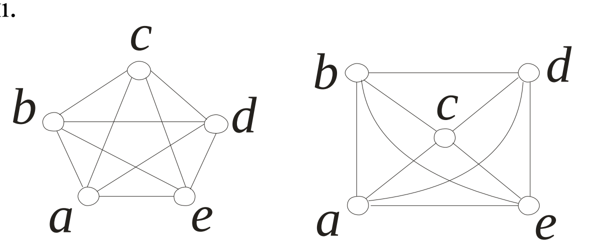
Задати граф – означає описати множини його вершин і ребер, а також відношення інцидентності. Коли граф G - кінцевий, для його опису досить занумерувати вершини і ребра.

Визначення 6.14. Граф G називається *повністю заданим* у точному значенні, якщо нумерація його вершин і ребер зафіксована. Графи, що відрізняються тільки нумерацією, називаються *ізоморфними*.

Приведемо ще одне визначення ізоморфних графів.

Визначення 6.15. Графи G_1 і G_2 *ізоморфні* якщо їхні вершини можна пронумерувати таким чином, що ребро e_j тоді і лише тоді коли з'єднує вершини v_i і v_k у графі G_1, коли ребро e'_j з'єднує вершини v'_i і v'_k у графі G_2.

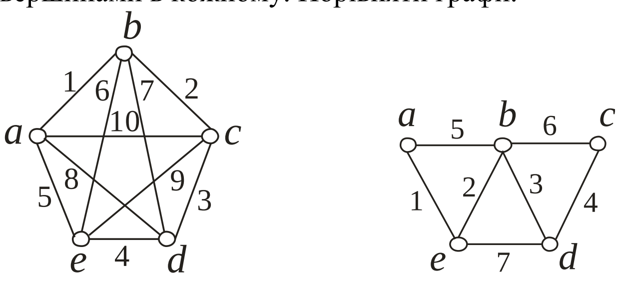
Приклад 6.7. Графи, зображені на рисунку 6.9,а,б - ізоморфні.



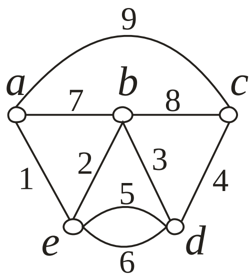
(а) (б)

Рис. 6.9.

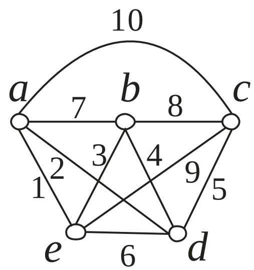
Приклад 6.8. На рис. 6.10 зображені графи G_1-G_{13} з п'ятьма вершинами в кожному. Порівняти графи.



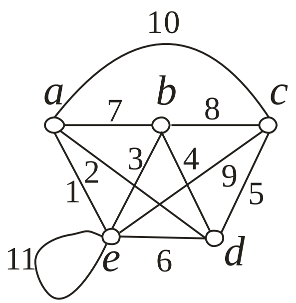
G_1 G_2



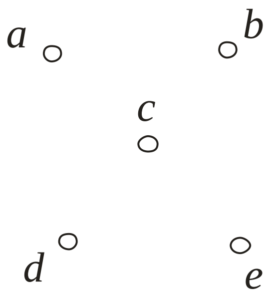
G_3



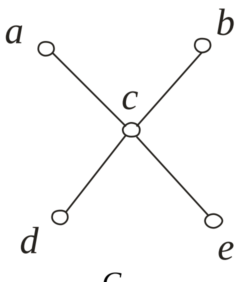
G_4



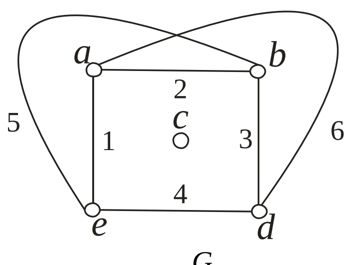
G_5



G_6



G_7



G_8

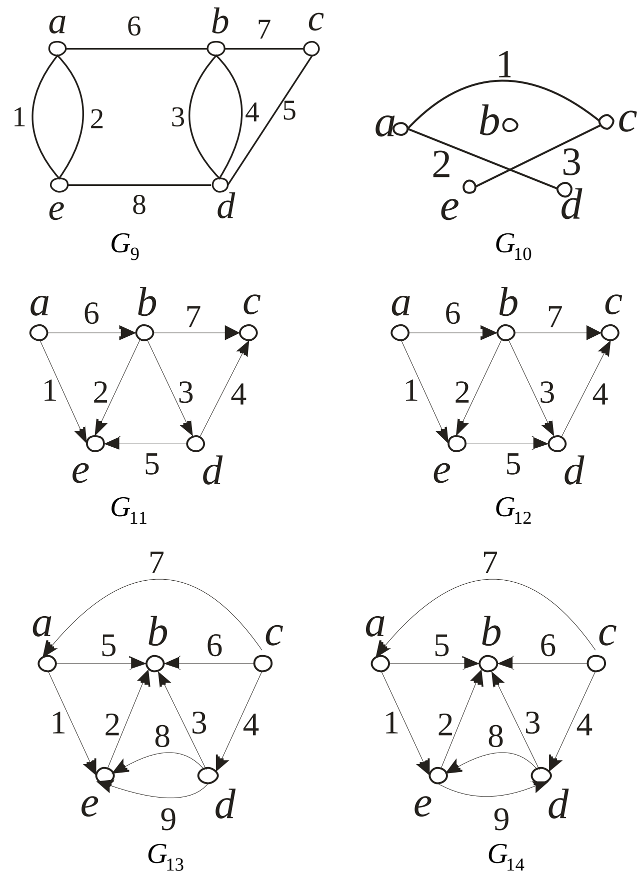


Рис. 6.10.

Розв’язання:

Графи G_1 - G_{10} - неорієнтовані графи, а G_{11} - G_{14} - орієнтовані.

Графи G_1 і G_4 - повні, причому $G_1 = G_4$.

Граф G_5 не є повним, тому що незважаючи на то, що кожна пара вершин з'єднана ребром, є петля.

Графи G_3 і G_9 є мультиграфами, тому що містять кратні ребра.

Граф G_6 - має порожню множину ребер, всі вершини графа є ізольованими.

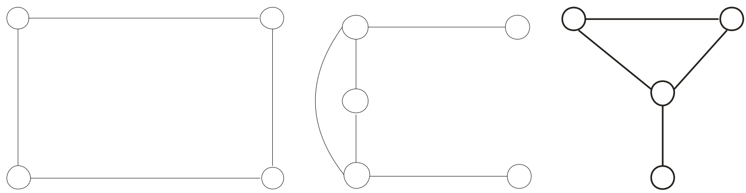
Графи G_7 і G_8, G_2 і G_{10} є доповненням друг до друга.

Графи G_{11} і G_{12} не є рівними, тому що ребра 5 мають різний напрямок.

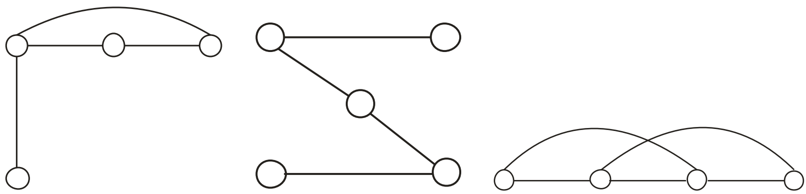
Граф G_{13} - орієнтований мультиграф, тому що має кратні ребра, у той час як граф G_{14} не є мультиграфом, тому що ребра 8 і 9 по-різному орієнтовані.

Завдання:

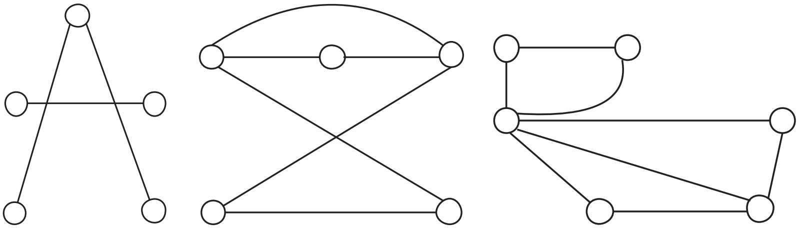
1. Визначити степені вершин графів G_1 - G_{14} (рис. 6.10).
2. Визначити доповнення $\overline{G}$ графів G, зображених на рис. 6.11. Побудувати повні графи.



(а) (б) (в)



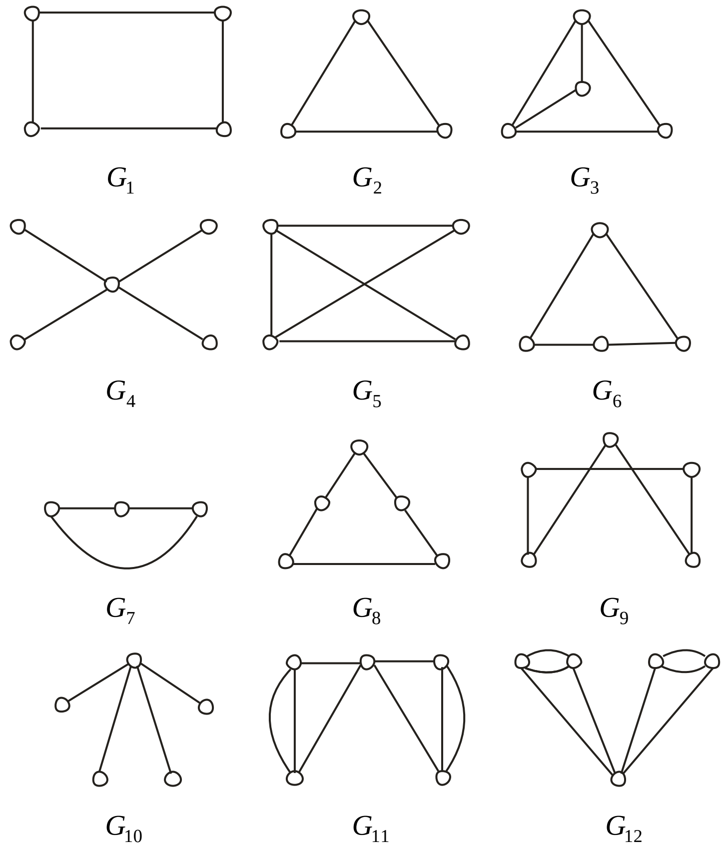
(г) (д) (е)

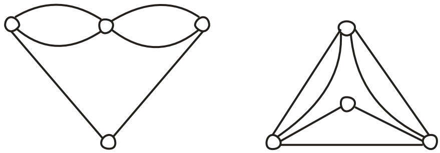


(є) (ж) (з)

Рис. 6.11.

3. Які пари графів, представлених на рис. 6.12, ізоморфні?





G_{13} G_{14} G_{15}

6.2. Способи завдання графів

Як було сказано в п. 6.1 для завдання графа необхідно занумерувати вершини і ребра, а також задати відношення інцидентності. Відношення інцидентності будемо описувати трьома способами: *матрицею інцидентності*, *матрицею суміжності*, *списком ребер* графа. Опишемо докладно кожний з перерахованих способів.

Матриця інцидентності $\|\varepsilon_{ij}\|$ – це матриця розміром $m \times n$, де вертикально вказуються вершини $i = \overline{1, n}$, а горизонтально – ребра $j = \overline{1, m}$. На перетині i -того рядка і j -того стовпця число ε_{ij} дорівнює:

а) у випадку неорієнтованого графа

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, \ якщо \ \ ребро \ \ e_i \ інцидентно \ вершині \ \ v_j; \\ 0, \ якщо \ \ ребро \ \ e_i \ \ не \ \ інцидентно \ вершині \ \ v_j; \\ \alpha, \ якщо \ \ ребро \ \ e_i - \ петля(\alpha \neq 0 \ і \ \alpha \neq 1). \end{cases}$$

б) у випадку орієнтованого графа

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} -1, \ якщо \ \ v_i - початок \ \ ребра \ \ e_j; \\ 1, якщо \ \ v_i - кінець \ \ ребра \ \ e_j; \\ 0, \ якщо \ \ вони \ \ не \ \ інцидентні; \\ \alpha, \ якщо \ \ e_j - петля, \ а \ \ v_i - інцидентна \ \ їй \ \ вершина. \end{cases}$$

<u>*Матриця суміжності*</u> $\left\|\delta_{ij}\right\|$ - це квадратна матриця розміром $n \times n$, де вертикально і горизонтально вказуються вершини графа $i = \overline{1,n}$ і $j = \overline{1,n}$. На перетинанні i-того рядка і j-того стовпця число δ_{ij} дорівнює:

- числу ребер, що з'єднують ці вершини у випадку неорієнтованого графа;
- числу ребер з початком в i-тій вершині і кінцем в j-тій вершині у випадку орієнтованого графа.

<u>*Список ребер*</u> графа – це таблиця, що складається із трьох рядків. У першому перераховані всі ребра; у другому і третьому – інцидентні їм вершини:

- у випадку неорієнтованого графа порядок вершин у рядку довільний;
- у випадку орієнтованого графа першою записується вершина, де починається ребро (другий рядок); вершина, де закінчується ребро, записується у третій рядок.

Для нумерації вершин і ребер графа використовують різний символьний запис: римські, арабські цифри, латинські букви.

Якщо графи рівні, то їх матриці суміжності і інцидентності, а також список ребер, однакові.

<u>***Приклад 6.9.***</u> Задати матрицями інцидентності і суміжності, а також списком ребер, неорієнтований граф, зображений на рисунку 6.13.

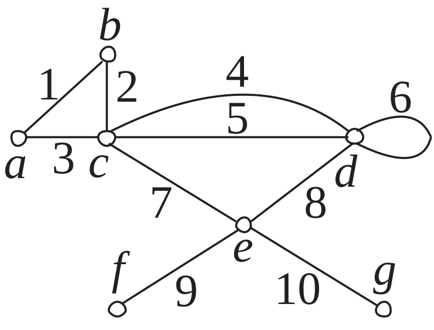


Рис. 6.13.

Розв'язання: Складемо за запропонованими схемами матриці інцидентності, суміжності, список ребер.

Матриця інцидентності

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0
d	0	0	0	1	1	2	0	1	0	0
e	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
f	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Тут $\alpha = 2$.

Матриця суміжності

	a	b	c	d	e	f	g
a	0	1	1	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	0
c	1	1	0	2	1	0	0
d	0	0	2	1	1	0	0
e	0	0	1	1	0	1	1
f	0	0	0	0	1	0	0
g	0	0	0	0	1	0	0

Список ребер

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вершини	початок	a	b	a	c	c	d	c	d	e	e
	кінець	b	c	c	d	d	d	e	e	f	g

Як бачимо, у кожному стовпці матриці інцидентності є тільки два елементи, відмінних від нуля (або один, якщо ребро – петля).

Матриця суміжності симетрична щодо головної діагоналі.

Список ребер є найбільш компактним способом завдання графів.

Кожний із наданих способів однозначно описує граф, зображений на рис. 6.13.

<u>Приклад 6.10.</u> Задати матрицями інцидентності, суміжності, списком ребер орієнтований граф, зображений на рисунку 6.14.

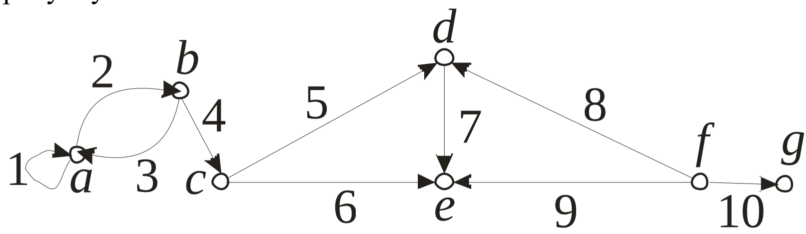


Рис. 6.14.

Розв’язання:

Матриця інцидентності

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	2	–1	1	0	0	0	0	0	0	0
b	0	1	–1	–1	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	1	–1	–1	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1	0	–1	1	0	0
e	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
f	0	0	0	0	0	0	0	–1	–1	–1
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Матриця суміжності

	a	b	c	d	e	f	g
a	1	1	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	0
c	0	0	0	1	1	0	0
d	0	0	0	0	1	0	0
e	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	1	1	0	1
g	0	0	0	0	0	0	0

Список ребер

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вершини	початок	a	a	b	b	c	c	d	f	f	f
	кінець	a	b	a	c	d	e	e	d	e	g

Відмінність матриці інцидентності орієнтованого графа від неорієнтованого складається у необхідності відзначання початку і кінця ребер. Матриця суміжності втрачає свою симетричність. У списку ребер важливий порядок запису вершин, що з’єднують зазначені ребра (від початку до кінця).

Як відзначалося вище, всі розглянуті способи завдання графів однозначно визначають граф. Виникає питання: чи можливо відновити граф по заданих матрицях інцидентності, суміжності або списку ребер? Очевидна позитивна відповідь.

По матриці інцидентності число ребер і вершин визначається з розмірності матриці: число ребер $|E|$ графа дорівнює числу стовпців m, а число вершин $|V|$ - числу рядків n матриці.

По матриці суміжності число вершин визначається з розмірності матриці. Як було відзначено, матриця суміжності н-графа симетрична щодо головної діагоналі, і кількість ребер визначається верхнім правим трикутником матриці, розташованим над головною діагоналлю, включаючи останню. Тобто, число ребер н-графа дорівнює сумі елементів, розташованих на головній діагоналі і у верхньому правому трикутнику. У матриці суміжності орграфа симетрія відсутня, а число ребер дорівнює сумі всіх елементів матриці суміжності.

Список ребер є скороченим варіантом матриці інцидентності. Кількість ребер очевидна, а кількість вершин дорівнює максимальному номеру всіх перерахованих вершин зі списку.

Тобто, матриця інцидентності і список ребер по суті, еквівалентні, то знаючи матрицю інцидентності можна записати список ребер, і навпаки.

Побудова матриці інцидентності за списком ребер. Кожен рядок списку ребер відповідає рядку в матриці инцидентности з тим же номером. Для неорієнтованого графа в кожному рядку списку ребер зазначені номери елементів матриці инцидентности рівні 1 (всі інші елементи – нулі). Для орієнтованого графа першою вказується вершина, що відповідає початку ребра (у матриці инцидентности – елемент -1), а другий – відповідному кінцю ребра (у матриці инцидентности – елемент 1). При збігу елементів у рядку списку ребер, у відповідному рядку матриці инцидентности записується число, відмінне від -1, 0, 1, наприклад, 2. Така ситуація відповідає наявності у графі петель.

<u>Приклад 6.11.</u> Побудувати матрицю інцидентності неорієнтованого графа за списком ребер:

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8
Вершини	початок	a	d	e	c	a	d	b	f
	кінець	d	f	f	e	b	c	f	f

Розв'язання:

Матриця інцидентності, відповідно до списку ребер, має вигляд:

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	1	0	0	0	1	0	0	0
b	0	0	0	0	1	0	1	0
c	0	0	0	1	0	1	0	0
d	1	1	0	0	0	1	0	0
e	0	0	1	1	0	0	0	0
f	0	1	1	0	0	0	1	2

<u>Приклад 6.12.</u> Записати список ребер відповідно до матриці інцидентності орієнтованого графа:

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	1	0	0	0	0	0	0	-1
b	-1	-1	0	0	0	0	0	0
c	0	1	2	-1	0	0	0	0
d	0	0	0	1	2	-1	0	0
e	0	0	0	0	0	1	-1	0
f	0	0	0	0	0	0	1	1

Розв'язання: Список ребер, записаний відповідно до матриці інцидентності орієнтованого графа має вигляд:

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8
Вершини	початок	b	b	c	c	d	d	e	a
	кінець	a	c	c	d	d	e	f	f

У визначенні 6.14 ми ввели поняття ізоморфних графів. Чи можливо встановити, чи є графи ізоморфними за їхніми матрицями інцидентності, суміжності, або списку ребер?

Для перевірки ізоморфності графів G_1 і G_2 за матрицею суміжності необхідно визначити, чи існує така перестановка рядків і стовпців у матриці суміжності G_1, щоб у результаті вийшла матриця G_2. Із цією метою треба зробити всі можливі перестановки рядків і стовпців (а їхня максимальна кількість дорівнює $n!\cdot n!$)! Якщо після однієї із цих перестановок матриці суміжності тотожньо збіжаться, то графи ізоморфні.

Для перевірки ізоморфності графів G_1 і G_2 за матрицею інцидентності (і списку ребер) необхідно визначити, чи існує така перестановка рядків і стовпців у матриці інцидентності G_1, щоб у результаті вийшла матриця G_2. Із цією метою треба зробити всі можливі пари перестановок рядків і стовпців (а їхня максимальна кількість дорівнює $n!\cdot m!$)! Якщо після однієї із цих перестановок матриці інцидентності тотожно збіжаться, то графи ізоморфні.

І в першому, і в другому випадку це досить трудомісткі операції, і розв'язання задачі «вручну» не завжди виправдано. Найчастіше изоморфність графів простіше встановити з їх графічних подань.

Завдання:

4. Задати матрицями інцидентності, суміжності і списком ребер неорієнтовані графи, зображені на рис. 6.15:

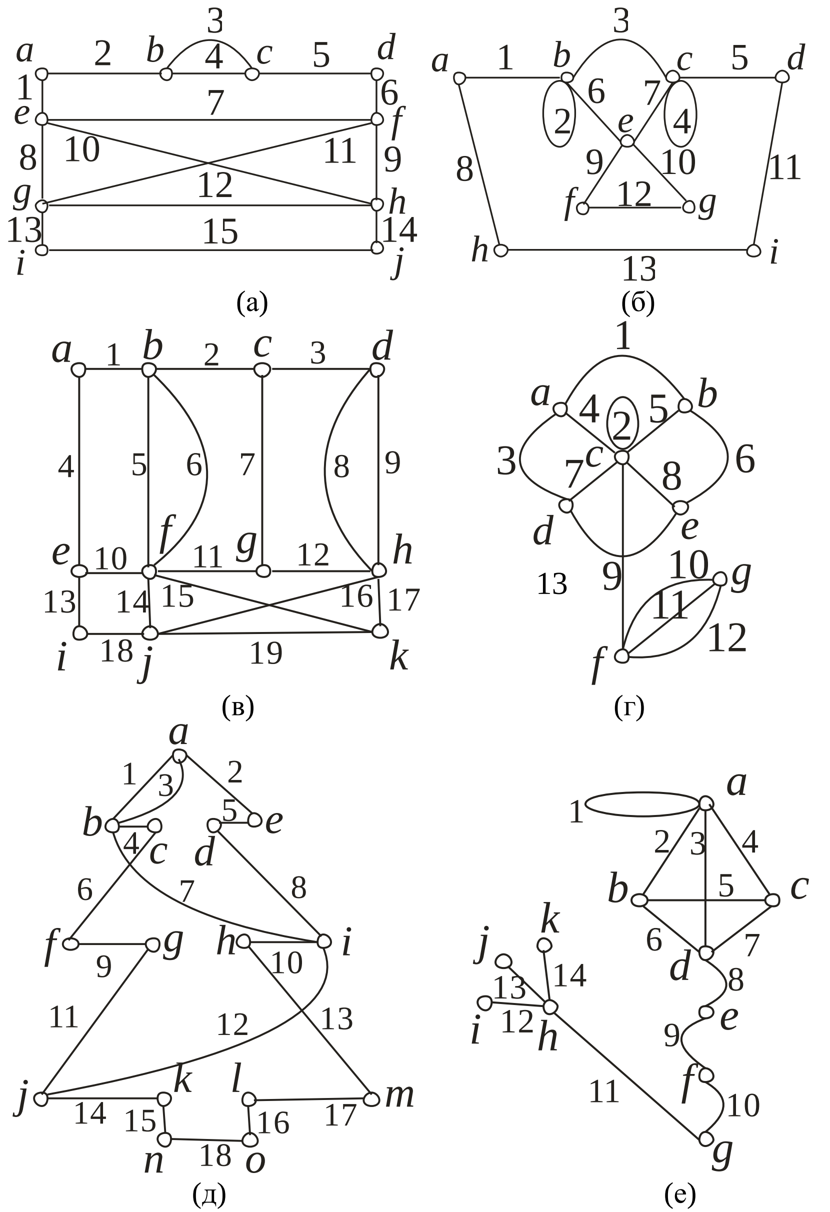


Рис. 6.15.

5. Задати матрицями інцидентності, суміжності і списком ребер орієнтовані графи, зображені на рис. 6.16:

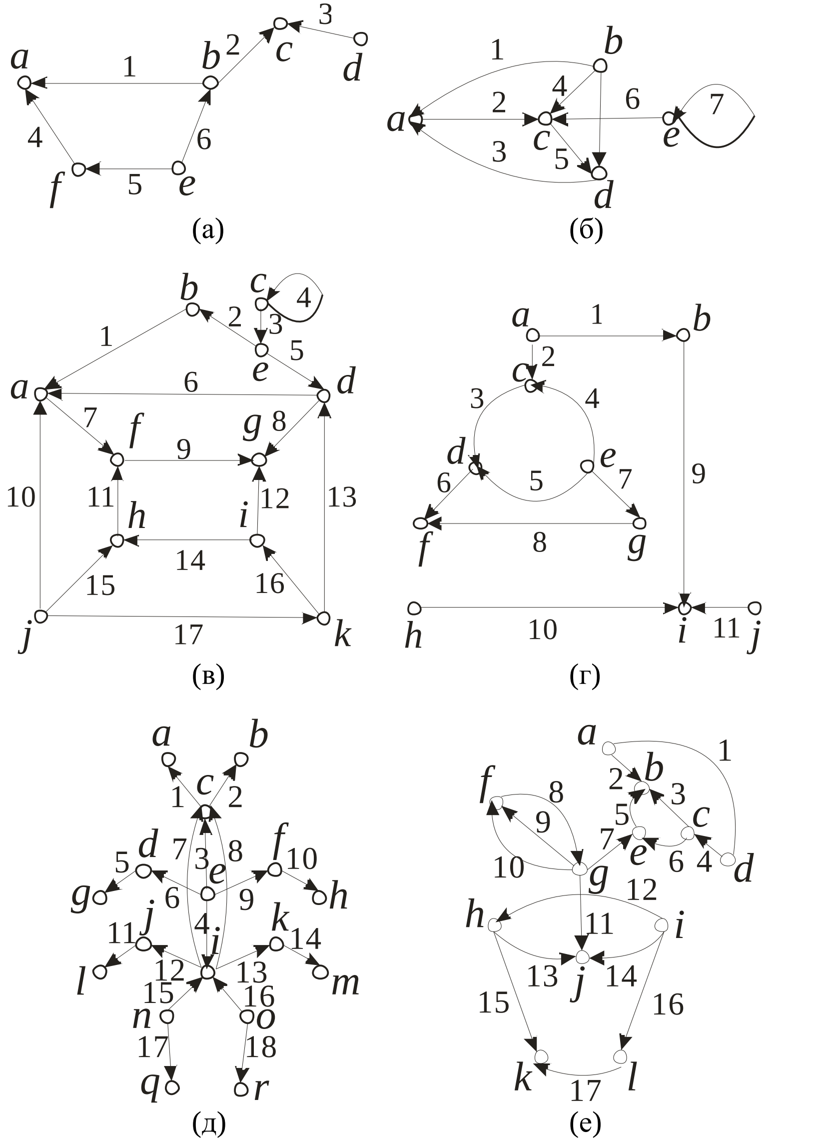


Рис. 6.16.

6. Для заданих матриць інцидентності а) і б) знайти відповідний граф.

а)

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	1	0	1	0	0	1	0	0
b	0	1	0	1	0	0	1	0
c	0	1	1	0	1	0	0	1
d	1	0	0	1	1	0	0	0
e	0	0	0	0	0	1	1	1

б)

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	1	0	1	0	1	0	0	0
b	0	1	0	1	0	1	0	1
c	0	1	0	0	0	0	1	0
d	1	0	0	0	1	1	0	0
e	0	0	1	1	0	0	1	1

7. Для заданих матриць суміжності а) і б) знайти відповідний граф.

а)

	a	b	c	d	e	f
a	0	0	1	0	1	0
b	0	0	1	0	1	1
c	1	1	0	1	0	0
d	0	0	1	0	1	1
e	1	1	0	1	0	0
f	0	1	0	1	0	0

б)

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	0	1	0
b	1	0	1	1	0	0
c	0	1	0	1	0	0
d	0	1	1	0	1	1
e	1	0	0	1	0	1
f	0	0	0	1	1	0

6.3. Зв'язність графа. Маршрути, шляхи, ланцюги, цикли

6.3.1. G -неорієнтований граф

Визначення 6.16. *Маршрутом (шляхом)* у графі G називається така послідовність ребер $M(e_1, e_2, ..., e_n)$, у якій кожні два сусідніх ребра e_{i-1} і e_i мають спільну вершину. У маршруті те саме ребро може зустрічатися кілька разів. Іншими словами *маршрут* – це сукупність ребер, які об'єднані разом вершинами так, що можна рухатися по них уздовж графа.

Визначення 6.17. *Початок маршруту* – це вершина v_0, інцидентна ребру e_1 і не інцидентна ребру e_2. *Кінець маршруту* – це вершина v_n інцидентна ребру e_n і не інцидентна e_{n-1}. Якщо ребра e_1, e_2 (e_{n-1} ,e_n) - кратні, то необхідно додатково вказувати, яку із двох інцидентних вершин вважати початком (кінцем) маршруту.

Визначення 6.18. *Маршрут довжини* k - послідовність, що містить k ребер. Іншими словами, *довжиною маршруту* називається кількість ребер у ньому; при цьому кожне ребро враховується стільки разів, скільки разів воно зустрічається в маршруті.

Позначення маршруту з v_0 у v_n - послідовністю $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 .... v_{n-1} e_n v_n$ надлишкове, тому ми будемо позначати маршрут як $v_0 v_1 v_2 .... v_{n-1} v_n$.

Визначення 6.19. Маршрут, всі ребра якого різні, називається *ланцюгом*. Ланцюг, що не перетинає себе, тобто не має вершин, що повторюються, називається *простим*.

Приклад 6.13. Визначити можливі маршрути (і їхню довжину) з вершини v_0 в v_8 у графі, зображеному на рисунку 6.17.

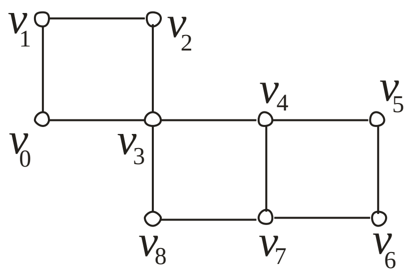


Рис. 6.17.

Розв'язання: з вершини v_0 у v_8 ведуть, наприклад, шляхи:

1) $v_0v_3v_8$ - довжини 2;
2) $v_0v_1v_2v_3v_8$ - довжини 4;
3) $v_0v_3v_4v_7v_8$ - довжини 4;
4) $v_0v_3v_4v_5v_6v_7v_8$ - довжини 6;
5) $v_0v_3v_4v_5v_4v_7v_8$ - довжини 6;
6) $v_0v_1v_2v_3v_4v_7v_8$ - довжини 6;
7) $v_0v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8$ - довжини 8;
8) $v_0v_1v_2v_3v_4v_7v_6v_5v_4v_3v_8$ -довжини10

Шляхи: 6), 8) не є простими.

Визначення 6.20. Маршрут, у якому збігаються початок і кінець - v_0 і v_n - називається *циклічним*. Циклічний маршрут називається *циклом*, якщо він є ланцюг, і *простим циклом* – якщо це простий ланцюг.

Наприклад, маршрут $v_0v_1v_2v_3v_0$ для графа, зображеного на рис. 6.17, є простим циклом; а маршрут $v_3v_4v_5v_6v_7v_4v_3$ є циклом, але не буде простим, тому що містить вершини, які повторюються.

Визначення 6.21. Вершини v' і v'' графа G називаються *зв'язаними*, якщо існує маршрут з початком у v' і кінцем у v''. Маршрут між зв'язаними вершинами може бути поданий простим ланцюгом.

Визначення 6.22. Граф G називається *зв'язним*, якщо будь-які пари його вершин зв'язані між собою.

<u>Приклад 6.14.</u> Граф, зображений на рисунку 6.18,а – не зв'язний, а граф на рис. 6.18,б – зв'язний.

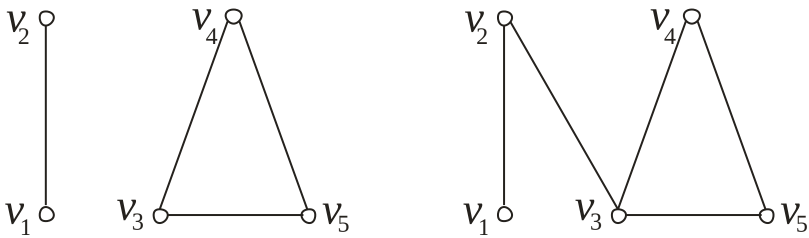


Рис. 6.18.

<u>Теорема 6.3.</u> Якщо існує маршрут з вершини v_0 в v_n графа G, то існує простий ланцюг, що з'єднує вершини v_0 і v_n.

<u>Наслідок.</u> Граф G є зв'язним тоді і тільки тоді, коли між будь-якими двома його вершинами існує простий ланцюг.

<u>Визначення 6.23.</u> Максимальний непустий зв'язний підграф G' графа G називається *компонентом* графа G.

Отже, кожен граф являє собою об'єднання своїх компонентів, які попарно не перетинаються.

Незв'язний граф має, як мінімум, два компоненти. Наприклад, граф, зображений на рис. 6.18,а, має два компоненти: v_1v_2 і $v_3v_4v_5$.

<u>Визначення 6.24.</u> Вершина v називається *точкою зчленування*, якщо видалення її із графа приводить до збільшення числа компонентів зв'язності.

<u>Визначення 6.25.</u> Ребро e називається *міст*, якщо видалення його із графа приводить до збільшення числа компонентів зв'язності.

<u>Визначення 6.26.</u> Множина ребер C зв'язного графа G називається *множиною розрізу*, якщо видалення ребер із множини C порушує зв'язність графа, а видалення власної підмножини множини C залишає граф зв'язним. Якщо множина C складається з одного ребра, то це ребро називається *ребром розрізу*.

<u>Приклад 6.15.</u> Визначити ребра розрізу графа, зображеного на рисунку 6.19.

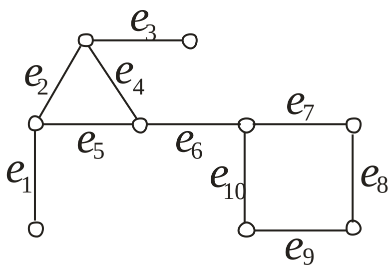


Рис. 6.19.

Розв'язання: Ребра e_1, e_3 і e_6 - є ребрами розрізу. Їх видалення порушує зв'язність графа.

<u>Приклад 6.16.</u> Визначити множини розрізу для графа, зображеного на рис. 6.20.

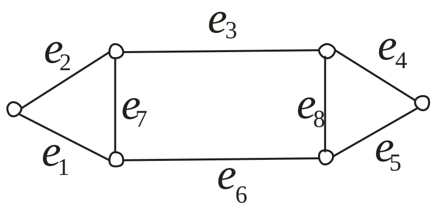


Рис. 6.20.

Розв'язання: Множинами розрізу для даного графа можуть бути, наприклад, ребра: $\{e_1, e_2\}$, $\{e_4, e_5\}$, $\{e_3, e_6\}$, $\{e_2, e_4, e_7, e_8\}$, $\{e_1, e_4, e_7, e_5\}$ і т.д.

6.3.2. G - орієнтований граф

<u>Визначення 6.27.</u> Послідовність ребер, у якому кінець кожного попереднього ребра e_{i-1} збігається з початком наступного e_i, називається *шляхом* або *орієнтованим маршрутом*. У шляху те саме ребро може зустрічатися кілька разів.

Визначення 6.28. *Початком шляху* є вершина v_0 ребра e_1, а *кінцем шляху* є вершина v_n ребра e_n.

Визначення 6.29. *Довжиною орієнтованого маршруту* називається кількість орієнтованих ребер, що входять у цей шлях.

Приклад 6.17. Для графа, зображеного на рис. 6.21, приведемо приклади орієнтованих маршрутів з вершини v_0 до вершини v_6: $v_0v_1v_3v_6$; $v_0v_2v_5v_6$; $v_0v_4v_3v_6$ - довжини 3; $v_0v_2v_5v_4v_3v_6$ - довжини 5.

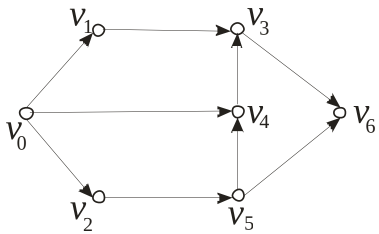
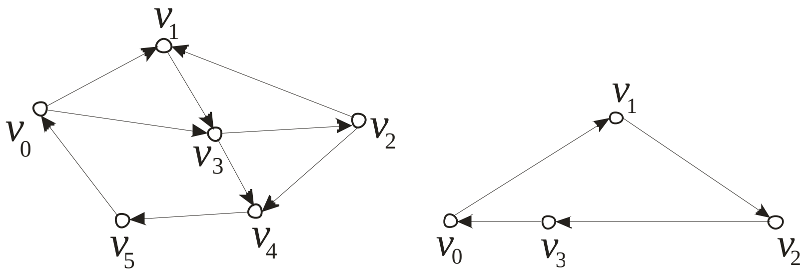


Рис. 6.21.

Визначення 6.30. *Орієнтованим ланцюгом* називається шлях, кожне ребро якого зустрічається не більше одного разу, і *простим ланцюгом*, якщо будь-яка вершина орграфа G інцидентна не більш ніж двом його ребрам.

Визначення 6.31. *Контуром* називається шлях, початок v_0 і кінець v_n якого збігаються. Контур називається *циклом*, якщо він є ланцюгом, і *простим циклом* – якщо це простий ланцюг.

Приклад 6.18. Для графа, зображеного на рис. 6.22,а, приклади: орієнтованого ланцюга - $v_0v_1v_3v_2v_4v_5$; контуру - $v_0v_1v_3v_2v_1v_3v_4v_5v_0$; циклу - $v_0v_3v_4v_5v_0$. Для графа, зображеного на рис. 6.22,б, приклади: простого орієнтованого ланцюга - $v_0v_1v_2$; простого циклу - $v_0v_1v_2v_3v_0$. При цьому зауважимо, що при запису циклу як для орієнтованого, так і для неорієнтованого графа, як початком, так і кінцем може бути обрана будь-яка вершина. Наприклад: $v_1v_2v_3v_0v_1$; $v_2v_3v_0v_1v_2$ і т.п.

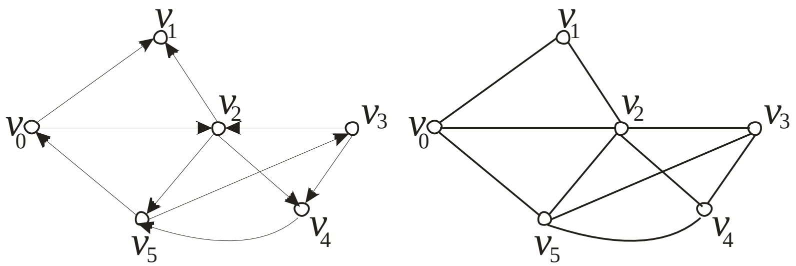


(а) (б)

Рис. 6.22.

<u>Визначення 6.32.</u> Для кожного орієнтованого графа G може бути побудований неорієнтований граф G^s, такий, що всі вершини цих графів збігаються, а кожне ребро G (крім петель), стане неорієнтованим ребром графа G^s. У такому випадку граф G^s називається *співвіднесеним графом* орієнтованого графа G.

<u>Приклад 6.19.</u> Для графа G, зображеного на рисунку 6.23,а, співвіднесений граф G^s буде мати вигляд (рис. 6.23,б):



(а) (б)

Рис. 6.23.

Визначення 6.33. Вершина $v'' \in G$ називається *досяжною* з вершини $v' \in G$, якщо існує шлях з початком у v' і кінцем у v''.

Визначення 6.34. Орієнтований граф G називається *зв'язним*, якщо його співвіднесений граф G^s є зв'язним. Орієнтований граф називається *сильно зв'язним*, якщо для будь-якої пари вершин v', v'' існує орієнтований шлях з v', у v''.

Так, наприклад, граф, зображений на рис. 6.23,а, є зв'язним, але не є сильно зв'язним.

Завдання:

8. Для неорієнтованих графів, зображених на рис. 6.24 (а,б), привести приклади: маршруту; ланцюга; простого ланцюга; циклічного маршруту; циклу; простого циклу.

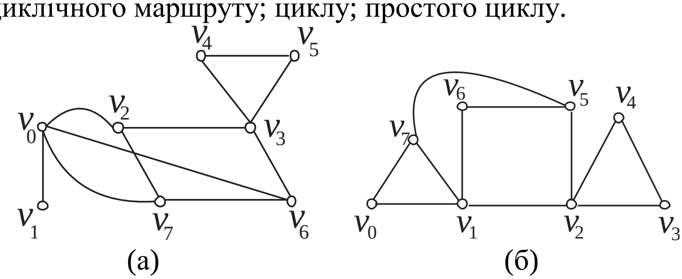


Рис. 6.24.

9. Для орієнтованих графів, зображених на рис. 6.25 (а,б), привести приклади: шляху; орієнтованого ланцюга; простого ланцюга; контуру; циклу; простого циклу.

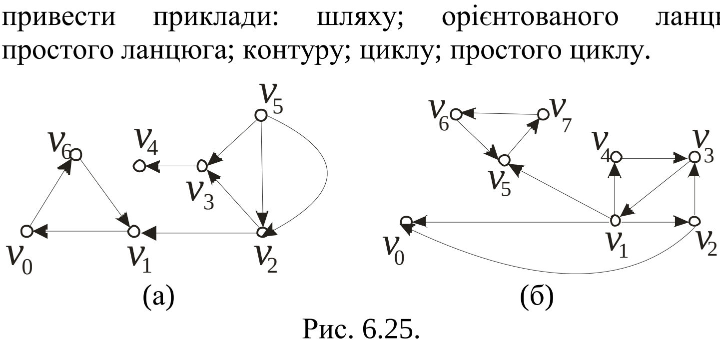


Рис. 6.25.

10. Визначити число компонент зв'язності у графах G, зображених на рис. 6.26 (а - г).

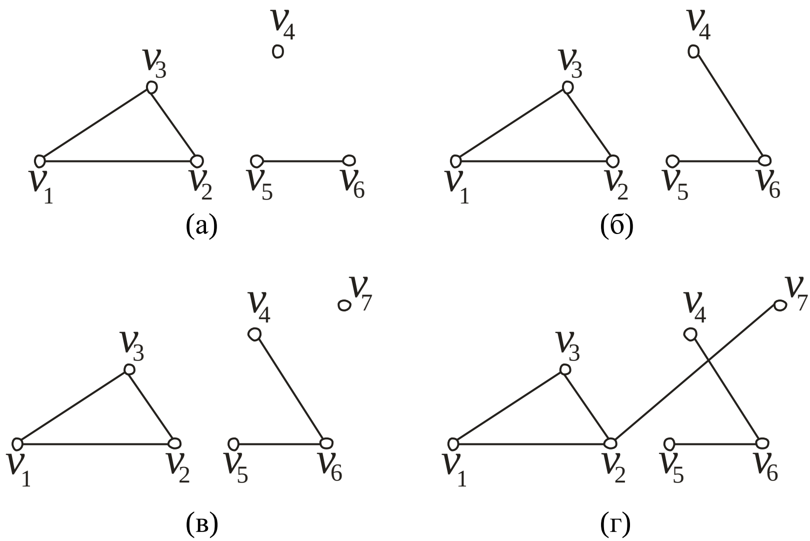
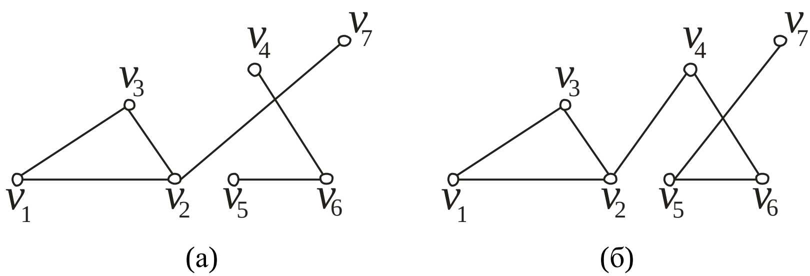


Рис. 6.26.

11. Знайти на графах G, зображених на рис. 6.27 (а - г), всі точки зчленування і мости:



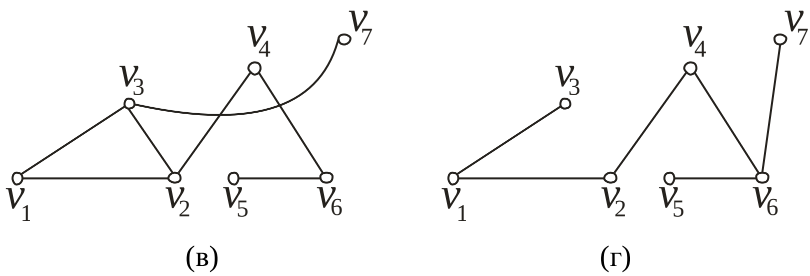


Рис. 6.27.

6.4. Метрика на графах

<u>Визначення 6.35.</u> *Відстанню* $d(v', v'')$ між вершинами v' і v'' графа G називається мінімальна довжина простого ланцюга з початком у вершині v' і кінцем у вершині v''. Якщо вершини v' і v'' не з'єднані ланцюгом, тобто належать різним компонентам, то покладається, що $d(v', v'') = \infty$.

У зв'язному графі G відстань між вершинами задовольняє наступним умовам:

1) $\forall v', v'' \in G$, $d(v', v'') \geq 0$ і $d(v', v'') = 0$ тоді і тільки тоді, коли $v' = v''$;

2) $\forall v', v'' \in G$, $d(v', v'') = d(v'', v')$;

3) $\forall v', v'', v''' \in G$, $d(v', v'') \leq d(v', v''') + d(v''', v'')$.

Функція $d(v', v'')$, що задовольняє трьом перерахованим умовам, називається *метрикою графа*.

<u>Визначення 6.36.</u> *Центром графа* називається вершина, від якої максимальна з відстаней до інших вершин була б мінімальною.

<u>Визначення 6.37.</u> *Периферійною точкою графа* називається вершина, від якої максимальна з відстаней до інших вершин була б максимальна.

<u>Визначення 6.38.</u> Максимальна відстань від центра графа G до його вершин називається *радіусом графа* $r(G)$.

<u>Визначення 6.39.</u> Найпростіший ланцюг найкоротшої довжини називається *геодезичним*.

<u>Визначення 6.40.</u> *Відхиленням вершини* $l(v)$ називається найбільша довжина геодезичної, яка з неї виходить.

У зв'язку із цим можна дати ще одне визначення радіуса графа:

<u>Визначення 6.41.</u> Відхилення центра називається *радіусом* графа $r(G)$, а відхилення периферійної точки – *діаметром* графа $D(G)$.

Алгоритм знаходження відстаней від даної вершини v_0 ***до інших вершин графа*** G :

1) позначаємо через $A_0 = \{v_0\}$;
2) позначаємо індексом 0 всі вершини, суміжні з вершиною v_0, виписуємо множину A_1 всіх цих вершин з їхніми позначками;
3) кожну вершину, що не належить множині $A_0 \cup A_1$ і суміжну з кожною з вершин, що належать множині A_1, позначаємо індексом v'; виписуємо множину A_2 всіх цих вершин з їхніми позначками …;

n) повторюємо описану процедуру доти, поки множина непомічених вершин не виявиться порожньою.

<u>Приклад 6.20.</u> Визначити відстань від вершини 7 (для зручності запису позначимо вершини графа арабськими цифрами) до всіх вершин графа G, зображеного на рисунку 6.28.

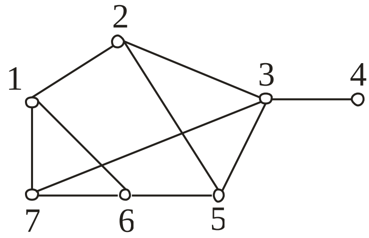


Рис. 6.28.

Розв'язання: Згідно алгоритму відстань від вершини 7 будемо шукати в такий спосіб:

1) $A_0 = \{7\}$; 2) $A_1 = \{1_7, 3_7, 6_7\}$; 3) $A_2 = \{2_{1,3}, 5_{3,6}, 4_3\}$.

Більше непомічених вершин немає. Тобто відстані від вершини 7 до кожної з вершин графа такі:

$$d(7,1) = d(7,3) = d(7,6) = 1;\ d(7,2) = d(7,4) = d(7,5) = 2\,.$$

Для визначення центра і радіуса графа необхідно побудувати для нього *матрицю відстаней* A, кожен елемент якої a_{ij} описує відстань між вершинами i і j графа G, тобто $a_{ij} = d(v_i, v_j)$. Очевидно, що матриця відстаней A симетрична щодо головної діагоналі (елементи якої дорівнюють нулю, тому що $d(v_i, v_i) = 0$).

<u>Приклад 6.21.</u> Визначити центр, периферійні вершини, радіус і діаметр графа G, зображеного на рис. 6.29.

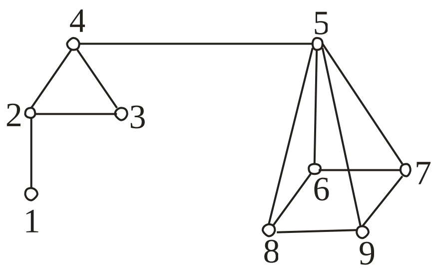


Рис. 6.29.

Розв'язання: Матриця відстаней графа G має вигляд.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	2	3	4	4	4	4
2	1	0	1	1	2	3	3	3	3
3	2	1	0	1	2	3	3	3	3
4	2	1	1	0	1	2	2	2	2
5	3	2	2	1	0	1	1	1	1
6	4	3	3	2	1	0	1	1	2
7	4	3	3	2	1	1	0	2	1
8	4	3	3	2	1	1	2	0	1
9	4	3	3	2	1	2	1	1	0

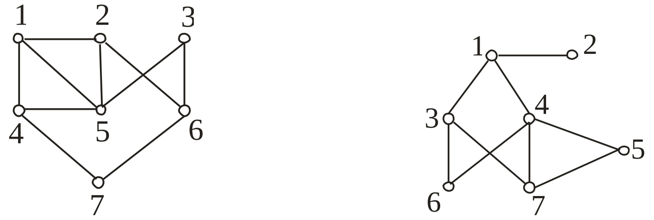
Знайдемо максимальну відстань від кожної з вершин графа $l(v_i)$ як $\max\limits_{1\le j\le 9} a_{ij}$: $l(1)=4$; $l(2)=3$; $l(3)=3$; $l(4)=2$; $l(5)=3$; $l(6)=4$; $l(7)=4$; $l(8)=4$; $l(9)=4$.

Отже, згідно з визначенням 6.36, центром графа є вершина 4; периферійні вершини – 1, 6, 7, 8, 9. Радіус графа $r(G)=2$, а діаметр графа $D(G)=4$.

Завдання:

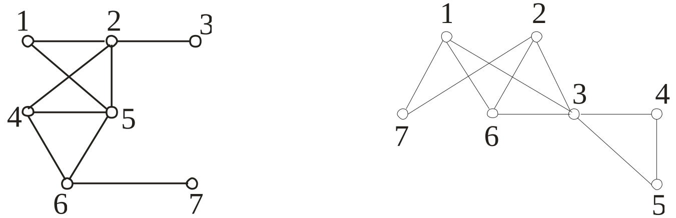
12. Визначити відстані від зазначеної вершини до всіх вершин графа G, зображеного на рис 6.30 (а- г):

    а) від вершини 5; б) від вершини 2;



(а) (б)

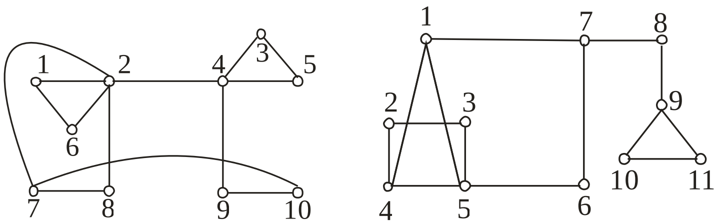
в) від вершини 6; г) від вершини 3.



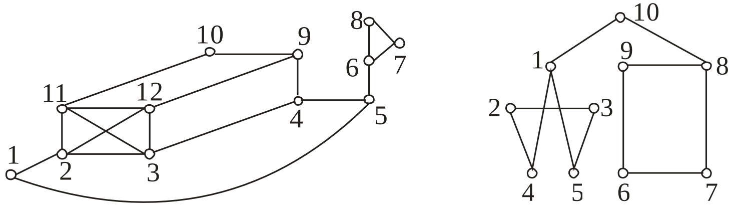
(в) (г)

Рис. 6.30.

13. Визначити центр, периферійні точки, радіус, діаметр графа G, зображеного на рис. 6.31(а - г):



(а) (б)



(в) (г)

Рис. 6.31.

6.5. Ейлеров цикл. Ейлеров граф

Теорія графів бере свій початок з розв'язання видатним математиком Ейлером у 1736 р. задачі про кенігсбергські мости. Вона виникла в пруському містечку Кенігсберг на річці Прегал. Жителі Кенігсберга полюбляли гуляти по доріжках, які включають сім мостів через річку. Людей цікавило питання, чи можуть вони, почавши шлях з однієї ділянки суші, обійти всі мости по черзі за одну ходу, і повернутися в початок шляху, не перепливаючи річку. План розташування семи мостів у Кенігсберзі наведений на рис. 6.32.

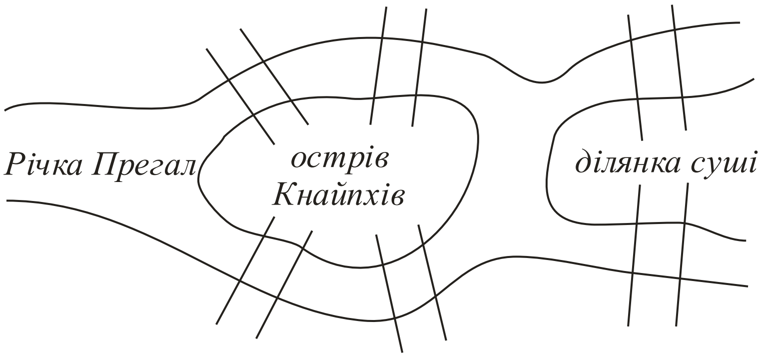


Рис. 6.32.

Ейлер замінив план міста графом (рис. 6.33), у якому ділянки суші зобразив як вершини, а мости, які їх з'єднують – як ребра.

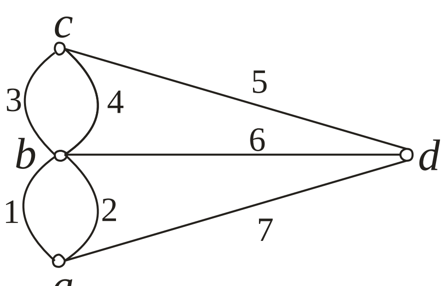


Рис. 6.33.

Для того, щоб відповістити на поставлене запитання, дамо ряд визначень.

Визначення 6.42. *Ейлеровим циклом* називається цикл, що містить всі ребра графа.

Ейлеров цикл можна розглядати як слід олівця, що вичерчує граф, не відриваючись від паперу.

Відшукання ейлерових циклів пов'язане з рядом прикладних задач. Наприклад, при перевірці дорожньої мережі необхідно по кожній дорозі досліджуваного маршруту проїхати тільки один раз і повернутися у вихідний пункт. Очевидно, що такі цикли існують не на будь-якому графі.

Визначення 6.43. *Ейлеровим графом* називається граф, що містить ейлеров цикл.

Теорема Ейлера. Кінцевий неорієнтований граф ейлеров тоді і тільки тоді, коли він зв'язний, і степінь всіх його вершин парна (при підрахунку степеня вершини, будь-яку інцидентну їй петлю вважати двічі).

Доведення:

Необхідність. Якщо граф G містить ейлеров цикл C, то будь-які дві його вершини належать цьому циклу; граф зв'язний. Якщо при обході циклу C деяка вершина a зустрічається k разів, то ми k разів входимо і виходимо з неї (щораз по різних ребрах). Отже, степінь вершини a дорівнює $2k$.

Достатність. Нехай граф G зв'язний і степінь будь-якої його вершини парна (рис. 6.34). Нехай a_1 - деяка вершина графа, a_i - суміжна їй вершина. Цій вершині a_i інцидентно хоча б одне ребро $(a_i a_j)$, відмінне від $(a_1 a_i)$, вершині a_j - ребро, відмінне від $(a_i a_j)$, і т.д.

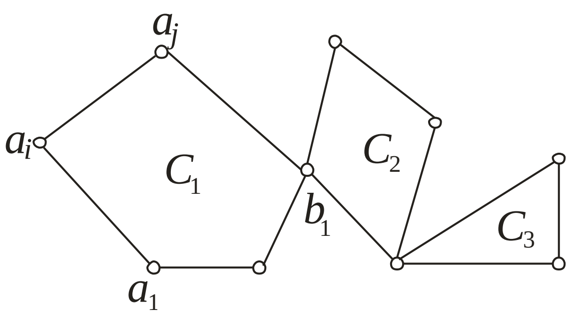
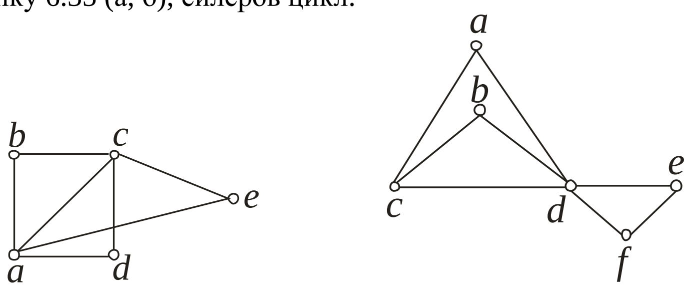


Рис. 6.34.

Побудуємо із цих ребер ланцюг, відзначаючи їх і не повторюючи вже пройдені. Граф G кінцевий, то цей ланцюг повинен закінчитися в деякій вершині a_2. Число ребер, інцидентных вершині a_2 парне. Якби a_2 була відмінною від a_1, ланцюг необхідно було би продовжити. Отже, $a_1 = a_2$. Ми побудували цикл C_1. Якщо в графі G залишилися невідмічені ребра, то оскільки G зв'язний, серед них найдеться хоча б одне, інцидентне якій-небудь вершині b_1 на циклі C_1. Починаючи з вершини b_1, ми можемо побудувати, як і раніше, цикл C_2 із ребер, що не ввійшли в C_1. З C_1 і C_2 можна скласти новий цикл, що проходить із a_1 у b_1 по C_1, потім уздовж усього циклу C_2, і по частині циклу C_1, що залишилася від b_1 до a_1. Оскільки граф G кінцевий, то після кінцевого числа кроків, ми одержимо ейлеров цикл.

Отже, ми готові відповістити на запитання жителів Кенігсберга. Для цього підрахуємо степені вершин графа, побудованого Ейлером (рис. 6.33): $\deg(a) = 3$; $\deg(b) = 5$; $\deg(c) = 3$; $\deg(d) = 3$. Цей граф має непарні степені вершин. Отже, цей граф не має ейлерова цикла. Тобто, неможливо пройти кожен міст по черзі за одну ходу і повернутися у вихідну точку шляху.

Приклад 6.22. Чи мають графи, зображені на рисунку 6.35 (а, б), ейлеров цикл.



(а) (б)

Рис. 6.35.

Розв'язання:

Щоб відповістити на поставлене запитання, порахуємо степені вершин графа:

а) $\deg(a)=4$; $\deg(b)=2$; $\deg(c)=4$; $\deg(d)=2$; $\deg(e)=2$.

Степені всіх вершин графа, зображеного на рис. 6.35,а, парні, отже, граф, має ейлеров цикл;

б) $\deg(a)=2$; $\deg(b)=2$; $\deg(c)=3$; $\deg(d)=5$; $\deg(e)=2$; $\deg(f)=2$.

Степені вершин c і d графа, зображеного на рис. 6.35,б, непарні, отже, граф не має ейлеров цикл.

Що стосується кенігсбергських мостів, можна задати інше питання: «чи можливо пройти кожен міст по одному разі і не обов'язково повертатися у вихідну точку маршруту?» Відповідь на це питання жадає від нас знання наступного визначення і теореми.

Визначення 6.44. Шлях, що включає кожне ребро графа G тільки один раз, називається *ейлеровим шляхом*. У тому випадку, якщо ейлеров шлях не є ейлеровим циклом, він називається *власним ейлеровим шляхом*.

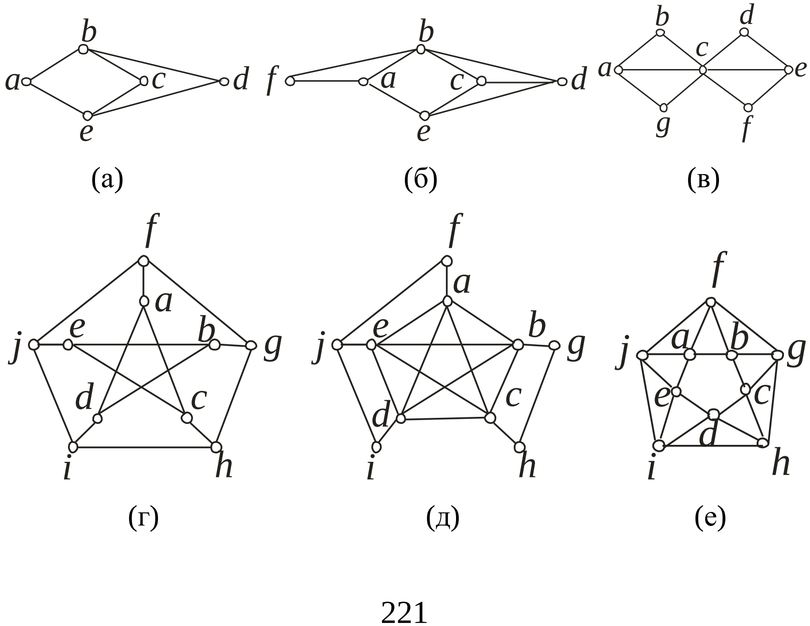
Теорема 6.4. Граф G має власний ейлеров шлях тоді і тільки тоді, коли він зв'язний і рівно дві його вершини мають непарний степінь.

Тому що граф для задачі про кенігсбергські мости має чотири вершини з непарними степенями, то можна зробити висновок про те, що даний граф не має власного ейлерова шляху, а отже, неможливо пройти кожен міст по одному разі, навіть якщо не потрібно повертатися у вихідну точку маршруту.

Так, наприклад, граф, зображений на рис. 6.35,б, не має ейлерова циклу, але має власний ейлеров шлях, тому що дві його вершини мають непарний степінь.

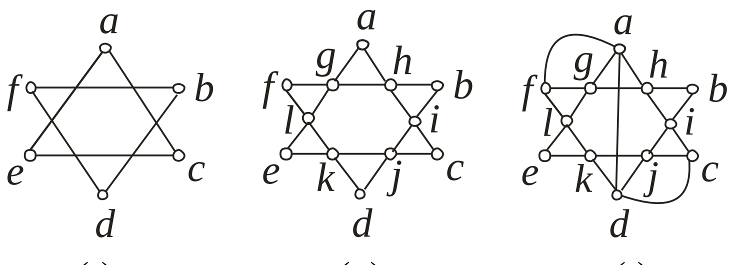
Вправи:

14. Серед наведених нижче графів (рис. 6.36) знайти ті, які мають ейлеров цикл. Обґрунтувати відповідь.



(а) (б) (в)

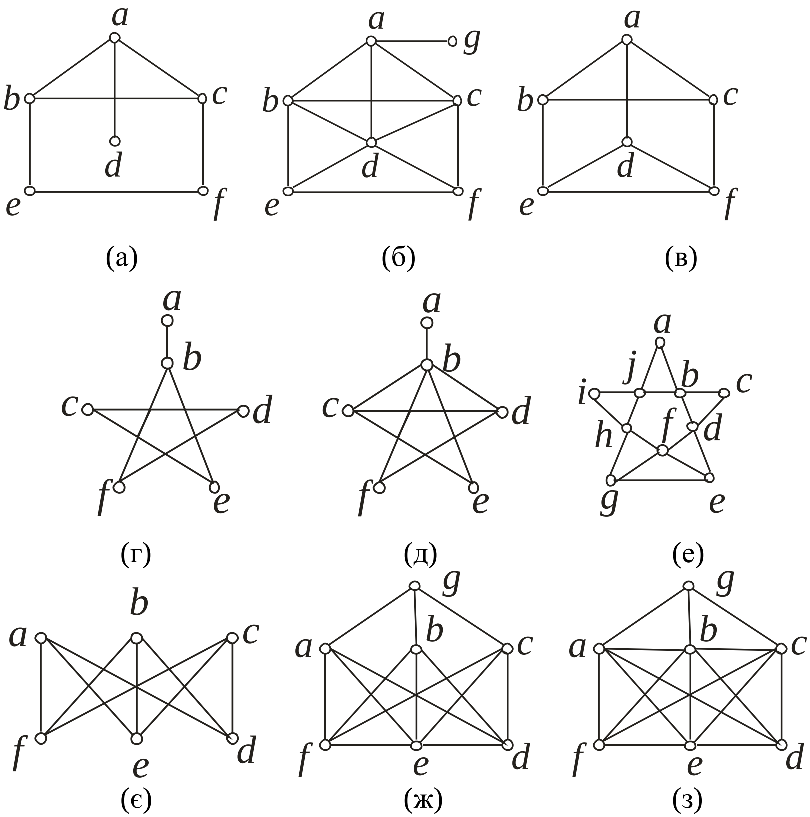
(г) (д) (е)



(є) (ж) (з)

Рис. 6.36.

15. Серед наведених нижче графів (рис. 6.37) знайти ті, які мають власний эйлеров шлях. Обґрунтувати відповідь.



(є) (ж) (з)

Рис. 6.37.

16. Придумати і побудувати графи, що містять ейлеров цикл. Обґрунтувати рішення.
17. Придумати і побудувати графи, що містять власний ейлеров шлях. Обґрунтувати рішення.

6.6. Шляхи і цикли Гамільтона

В 1857 році математик Вільям Роуен Гамільтон придумав іграшку-головоломку. Ця іграшка являла собою додекаедр – правильний багатогранник, 12 граней якого − це правильні п’ятикутники. У кожному з 20 кутів просвердлувалась дірка, у яку вставляли кілочок, що зображував місто. За допомогою мотузки було потрібно знайти шлях через міста, відвідав кожне місто один раз, і повернутися у вихідне місто. Додекаедр на площині зображується так, як показано на рис. 6.38.

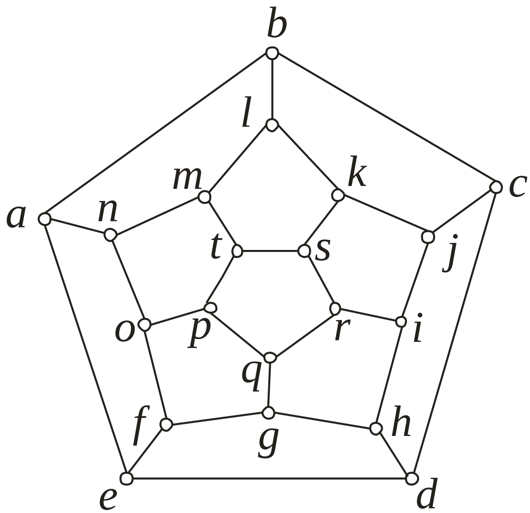


Рис. 6.38.

Задача головоломки зводиться до знаходження циклу в графі, що проходить через кожну вершину, крім початкової, тільки один раз.

Визначення 6.45. *Шляхом Гамільтона* (або *гамільтоновим ланцюгом*) називається простий ланцюг, що проходить через всі вершини графа, з початком і кінцем у різних вершинах $v', v'' \in G$.

Визначення 6.46. *Цикл Гамільтона* - це простий цикл, що проходить через всі вершини графа G .

Гамільтонів цикл у деякому змісті протилежний ейлерову циклу, що проходить через всі ребра один раз, хоча до певного моменту обидва цикли можуть здаватися схожими. Цикл Гамільтона виявляється набагато складніше, і для його знаходження поки немає ефективних алгоритмів, що вимагають істотно меншого часу, чим пряме перебирання варіантів. Проте приведемо ряд теорем без доведення, що дозволяють нам судити про можливість відшукати гамільтонів цикл у досліджуваному графі. А для початку покажемо один з варіантів рішення головоломки, запропонованої Гамільтоном (рис. 6.39).

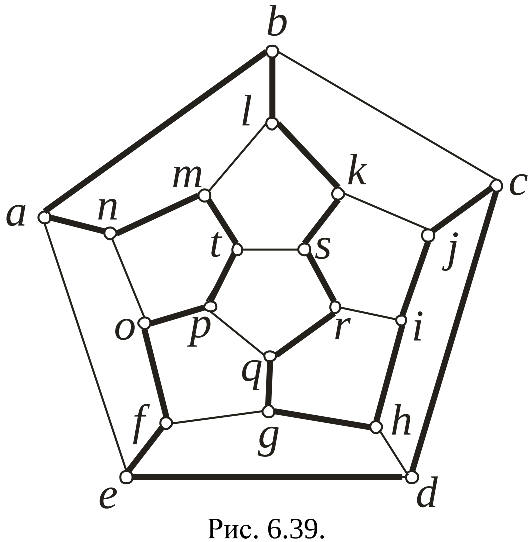


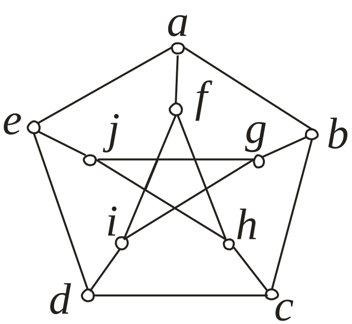
Рис. 6.39.

<u>Теорема 6.5.</u> Для будь-якої вершини із циклу Гамільтона існує рівно два ребра із цього циклу, інцидентні даній вершині.

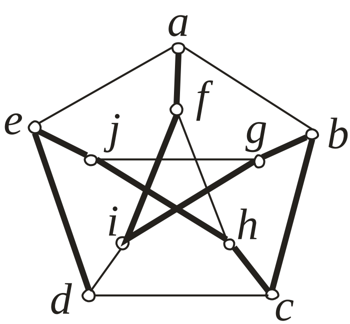
<u>Визначення 6.47.</u> Граф, що має цикл Гамільтона, називається *гамільтонів*.

З наведеного визначення, як наслідок теореми 6.5, робимо висновок про те, що будь-який граф, що має вершину степені 1, не є гамільтонів. Помітимо також, що для того, щоб граф мав цикл Гамільтона, необхідно, щоб він був зв'язним.

<u>Приклад 6.23.</u> Граф Петерсона, зображений на рис. 6.40,а, має шлях Гамільтона (рис. 6.40,б), але не має цикл Гамільтона.



(а)



(б)

Рис. 6.40.

<u>Теорема 6.6.</u> Якщо граф G має ребро розрізу, то він не може мати цикл Гамільтона. Якщо компоненти графа, отримані шляхом видалення ребра розрізу, мають цикл Гамільтона, то граф G має шлях Гамільтона.

<u>Теорема 6.7.</u> Якщо G - зв'язний граф з n вершинами $(n \geq 3)$ і для кожної пари несуміжних вершин $v', v'' \in V$, сума степенів вершин задовольняє умові $\deg v' + \deg v'' \geq n$, тоді граф G має цикл Гамільтона.

З теореми 6.7 випливає наслідок, більш відомий, чим сама теорема.

Наслідок. Якщо G - зв'язний граф з n вершинами $(n \geq 3)$ і для кожної вершини $v \in V$ виконується умова $\deg v \geq \frac{n}{2}$, то граф G має цикл Гамільтона.

Приклад 6.24. Знайдіть цикл Гамільтона, якщо він існує, для графа G, зображеного на рис. 6.41,а.

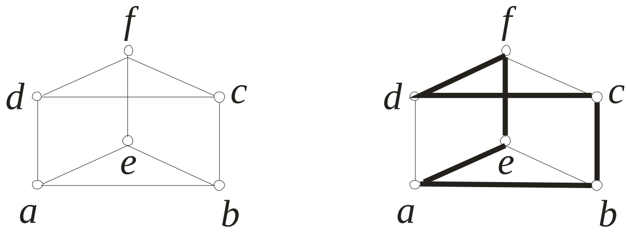


Рис. 6.41.

Розв'язання: Граф G - зв'язний, кількість вершин графа – $n = 6$. Степінь кожної з вершин дорівнює 3, тобто кожна з вершин графа задовольняє умові $\deg v \geq \frac{n}{2}$. Отже, даний граф є гамільтонів, тобто існує цикл Гамільтона. Знайти його можемо тільки методом перебирання. Результати прямого перебирання – цикл $baefdcb$ (рис. 6.41,б).

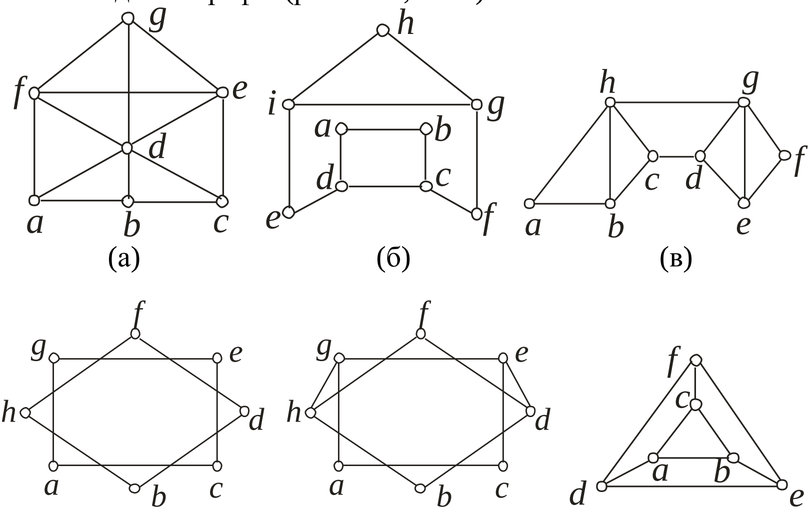
Практичне застосування циклів Гамільтона знаходимо в рішенні класичної задачі комівояжера, яка цікава для людей, у чиє коло обов'язків входить знаходження оптимальних шляхів, наприклад, об'їзду філій фірми, транспортування вантажів, доставки товарів і інше.

Задача комівояжера. Комівояжер повинен відвідати кілька міст і повернутися у вихідний пункт. Відстані між містами відомі. Потрібно знайти дорогу найкоротшої довжини. При такій постановці задачі схема доріг являє собою граф, у якій будь-якому ребру v запропонована певна довжина $\mathrm{d}(v)$. Задача комівояжера зводиться до знаходження в отриманому графі із заданими довжинами ребер циклу Гамільтона C мінімальної довжини.

Існує ряд алгоритмів, досить громіздких, що дозволяють знаходити найкоротший шлях від вершини v' до вершини v'', таких як алгоритми Дейкстри, Флойда-Уоршолла і т.п. Але ефективних алгоритмів, для пошуку циклу Гамільтона мінімальної довжини немає. Через їхню відсутність, щораз цю практичну задачу доводиться вирішувати методом прямого перебирання.

Завдання:

18. Знайдіть цикл Гамільтона, якщо він існує, для кожного з наведених графів (рис. 6.42, а − е).



(а) (б) (в)

(г) (д) (е)

Рис. 6.42.

19. Знайдіть шлях Гамільтона, якщо він існує, для кожного з наведених графів (рис. 6.43, а – в).

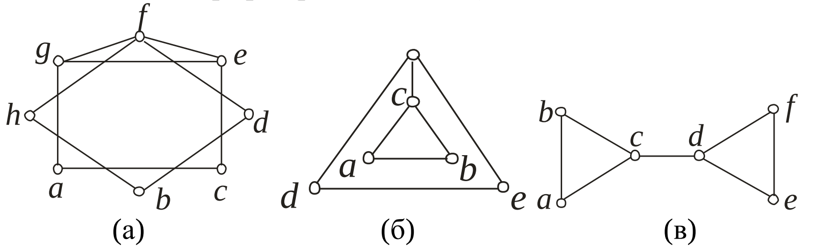


Рис. 6.43.

6.7. Планарні графи

<u>Визначення 6.48.</u> Граф G називається *правильно укладеним на площині*, якщо його графічне подання таке, що ребра графа перетинаються тільки в його вершинах.

<u>Визначення 6.49.</u> Граф G називається *плоским (планарним)*, якщо він ізоморфний деякому графу G^*, правильно укладеному на площині. Тобто *плоский* граф – це граф, який можна правильно укласти на площині.

<u>Приклад 6.25.</u> Графи G_1 і G_2, подані на рис. 6.44, ізоморфні. Граф G_2 - правильно укладений на площині. Отже, дані графи – плоскі.

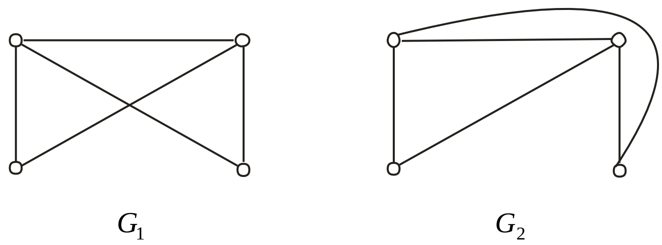


Рис. 6.44.

Розглянемо граф як малюнок на аркуші паперу. Якщо граф планарний, тобто намальований так, що його ребра не перетинаються, і його необхідно розрізати уздовж ребер, то граф виявиться розділеним на частини, включаючи зовнішню частину. Такі частини називаються *гранями*. Границя кожної грані є циклом.

Визначення 6.50. *Гранню планарного графа* називається така максимальна ділянка площини, що будь-які дві її точки можуть бути з'єднані кривою, що не перетинає ребро графа.

Задача про можливості правильного укладання графа на площині є актуальною у зв'язку з використанням у радіотехніці друкованих схем. Інтегральні мікросхеми складаються із шарів мініатюрних мікросхем, удрукованих у пластину. Ці схеми наносяться на ізолятор у друкований спосіб і перетинання яких-небудь двох провідників, у непередбачуваних точках (не у вершинах графа), привело б до їх замикання. Тобто для друкування електричних схем просто необхідно, щоб графи (що їх зображують) були плоскими.

Задачі, пов'язані із плоскими графами, актуальні не тільки в радіотехніці. Приведемо класичну задачу про три міста і три джерела постачання. Нехай є три міста x_1, x_2 і x_3 і три джерела життєзабезпечення: водонапірна башта y_1, електростанція y_2 і станція магістрального газопроводу y_3. Чи можна з'єднати ці міста із джерелами постачання водою, газом і електрикою так, щоб траншеї, прориті для цих ліній (на одній глибині) не перетиналися?

Ця задача зводиться до побудови плоского графа, ізоморфного графу, зображеному на рис. 6.45.

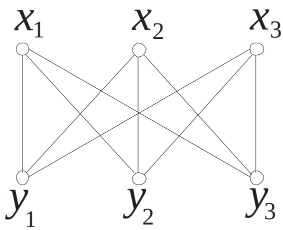


Рис. 6.45.

Відповідь на питання поставлене у сформульованій задачі негативна. Завжди можна намалювати 8 попарно неперетинаючихся ліній, а дев'ята обов'язково перетне одну із цих восьми.

Доведення неможливості такої побудови спирається на теорему, доведену Жорданом. Проілюструємо її в такий спосіб. Нехай L - безперервна замкнута лінія без самоперетинань (рис. 6.46). Ця лінія ділить площину на дві частини: зовнішню і внутрішню. Будь-які дві точки x і y із внутрішньої і зовнішньої частин відповідно можна з'єднати тільки лінією, що перетинає L.

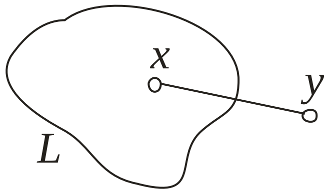


Рис. 6.46.

Позначимо граф, зображений на рис. 6.45 як K_{33}. Замінимо граф K_{33} йому ізоморфним (рис. 6.47).

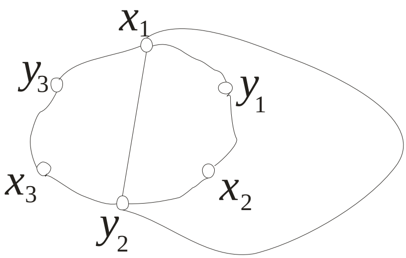


Рис. 6.47.

З'єднати вершини x_2 і y_3 без перетинання вже проведених ребер неможливо, тому що точка x_2 лежить усередині області, обмеженої кривою $x_1y_1x_3y_2x_1$, а точка y_3 - поза зазначеної області. Отже, граф K_{33} не є планарным.

Аналогічно доводиться непланарність повного графа K_5 (рис. 6.48).

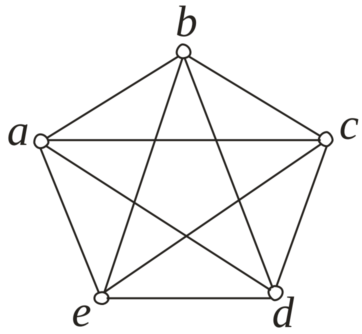


Рис. 6.48.

Використовуючи графи K_{33} і K_5, можна сформулювати наступний критерій планарності графів.

<u>Теорема 6.7.</u> ***(Теорема Куратовського)***. Граф є планарним тоді і тільки тоді, коли він не містить підграф, ізоморфний графу K_{33} або K_5.

Існують і інші критерії планарності графів.

<u>Теорема 6.8.</u> Якщо G - зв'язний планарний граф, що містить v вершин, e ребер і f граней, то повинна виконуватися умова $v - e + f = 2$.

За допомогою теореми 6.8 задача про життєзабезпечення трьох будинків (рис. 6.45) вирішується в такий спосіб. У графа K_{33} шість вершин і дев'ять ребер: $v = 6$, $e = 9$, а кількість граней - $f = 2$. Підставимо в умову $v - e + f = 6 - 9 + 2 = -1 \neq 2$.

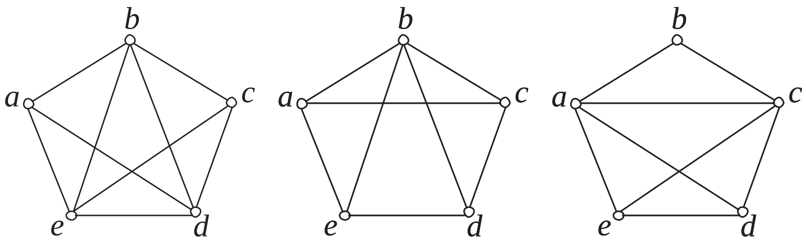
Умова теореми 6.8 не виконується. Отже, граф K_{33} - не планарний.

Лема 6.1. У довільному планарному графі G з кількістю вершин не менше трьох має місце нерівність $3v - e \geq 6$.

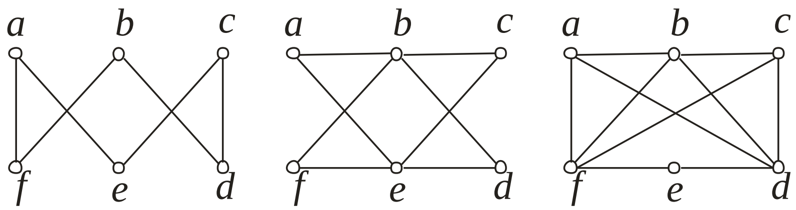
За допомогою леми 6.1 доведемо, що граф K_5 не планарний. Граф K_5 має п'ять вершин і десять ребер: $v = 5$, $e = 10$. Скористаємося умовою $3v - e = 3 \cdot 5 - 10 = 5 < 6$. Як бачимо, умова $3v - e \geq 6$ для графа K_5 не виконана, отже, граф K_5 не планарний.

Завдання:

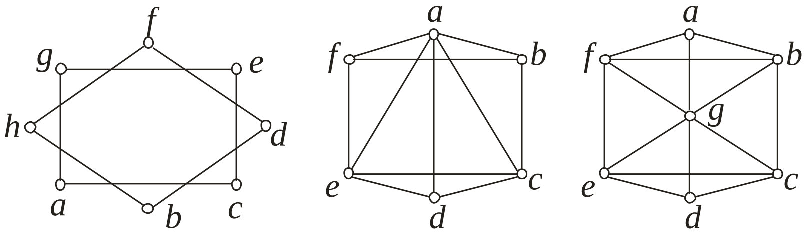
20. Кожний з наведених на рис. 6.49 (а − з) графів перевірити на планарність. Аргументувати рішення.



(а) (б) (в)



(г) (д) (е)



(є) (ж) (з)

Рис. 6.49.

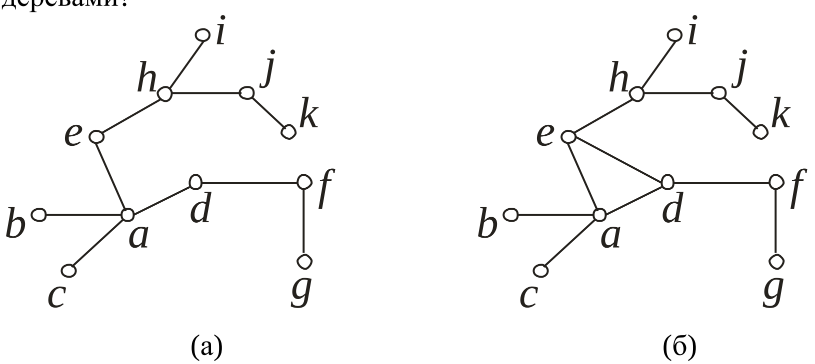
21. Для кожного планарного графа із завдання 20 запропонувати правильне укладання його на площині.
22. Для кожного планарного графа із завдання 20 перевірити виконання умови $v - e + f = 2$.

6.8. Дерева і ліс

<u>Визначення 6.51.</u> *Неорієнтованим деревом* (або просто *деревом*) називається неорієнтований зв'язний граф без циклів, отже без петель і кратних ребер, що має не менш двох вершин.

Дерево є мінімальним зв'язним графом у тому розумінні, що видалення хоча б одного ребра приводить до того, що граф виявляється незв'язним.

<u>Приклад 6.26.</u> Чи є графи, зображені на рис. 6.50 (а, б) деревами?



(а) (б)

Рис. 6.50.

Розв’язання:

Граф на рис. 6.50,а є деревом, тому що він зв'язний і не містить циклів. Граф на рис. 6.50,б не є деревом, тому що містить цикл $adea$.

Дамо без доведення ряд теорем, корисних для вивчення дерев. Читач може довести їх самостійно.

Теорема 6.9. Будь-яке дерево G з n вершинами містить $n-1$ ребро.

Теорема 6.10. Нехай G - граф, що містить більше однієї вершини. Видаляючи його ребра можна одержати дерево тоді і тільки тоді, коли він зв’язний.

Визначення 6.52. *Лісом* називається незв’язний неорієнтований граф без циклів. Зв’язані компоненти лісу є деревами.

Приклад 6.27. На рис. 6.51 наведений приклад лісу, що містить три дерева.

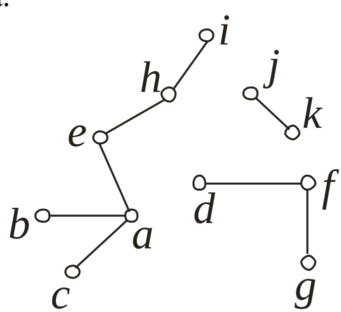


Рис. 6.51.

Добре зрозумілим прикладом дерева є: будь-яке генеалогічне дерево; організаційна структура будь-якого підприємства, організації.

Визначення 6.53. *Орієнтованим деревом* називається вільний від петель орієнтований граф, співвіднесений граф якого є деревом; тому якщо існує шлях від вершини v' до вершини v'', то він єдиний.

Помітимо, що якщо в орієнтованому дереві є ребро (v',v''), то немає ребра (v'',v'), інакше шлях $v'v''v'$ був би циклом.

Приклад 6.28. На рис. 6.52 наведено приклад орієнтованого дерева:

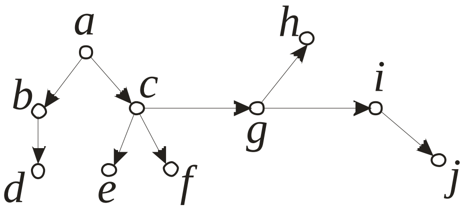


Рис. 6.52.

Визначення 6.54. Вершини дерева степіня 1 називаються *листя*, інші вершини – *внутрішніми вершинами*.

Наприклад, у дерева, зображеного на рис. 6.50,а, листя це вершини c, b, e, g, i, k. Інші вершини є внутрішніми.

Дерева визначаються такою властивістю: для будь-яких двох вершин v',v'' дерева T шлях з вершини v' до вершини v'' єдиний. І, навпаки, якщо для будь-яких двох вершин v',v'' графа G існує єдиний шлях з вершини v' до вершини v'', тоді граф G - дерево.

Припустимо, що дерево являє собою якийсь фізичний об'єкт, рухливий у вершинах. Його можна підвісити за кожну з вершин. Так, наприклад, якщо дерево, зображене на рис. 6.50(а) підвісити за вершину e, або d, то воно буде виглядати, як показано на рис. 6.53,а або на рис 6.53,б.

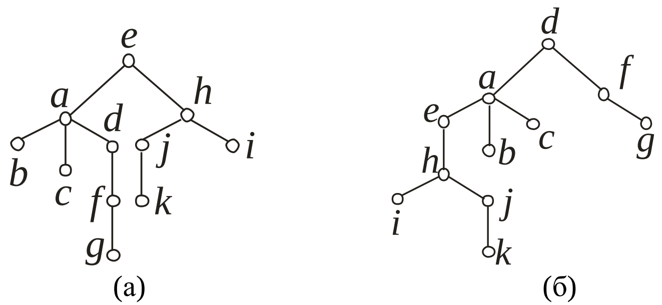


Рис. 6.53.

Обрана нами вершина називається *коренем* дерева і розташовується в самій верхній його частині. Для дерева на рис. 6.53,а коренем є вершина e, а для дерева на рис. 6.53,б – вершина d.

<u>Визначення 6.55.</u> Дерево, корінь якого визначений, називається *кореневим деревом*.

Аналогічно визначається і *орієнтоване кореневе дерево*. При цьому варто пам'ятати, що всі його ребра орієнтуються від кореня.

При заміні кореневого неорієнтованого дерева T на кореневе орієнтоване дерево T', говорять, що T' є *породженим кореневим деревом* T.

<u>Приклад 6.29.</u> На рис. 6.54,а зображене неорієнтоване кореневе дерево, а на рис. 6.54,б – породжене їм орієнтоване кореневе дерево.

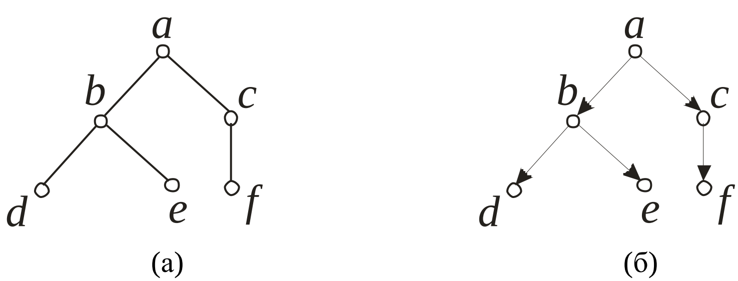


Рис. 6.54.

Якщо корінь дерева обраний, то можна ввести ще ряд визначень.

<u>Визначення 6.56.</u> *Рівнем вершини* v називається довжина єдиного шляху від кореня дерева до вершини v.

<u>Визначення 6.57.</u> *Висотою дерева* називається довжина самого довгого шляху від кореня дерева до листя.

<u>Приклад 6.30.</u> Для кореневого дерева, зображеного на рис. 6.55, визначити рівень вершини d, висоту дерева.

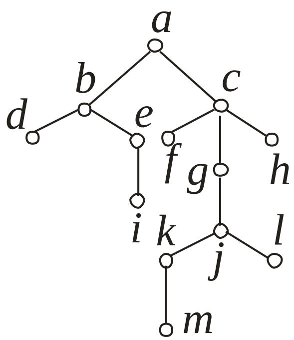


Рис. 6.55.

Розв'язання: Рівень вершини d дорівнює двом; а висота дерева з коренем у вершині a дорівнює максимальному шляху від кореня до вершини m - $acgjkm$ -дорівнює п'яти.

Для генеалогічних дерев дамо ряд визначень. Їх можна розповсюдити на будь-які орієнтовані кореневі дерева.

<u>Визначення 6.58.</u> Якщо існує орієнтоване ребро з u в v, то вершина u називається *батьком* вершини v, а вершина v - *сином (дочкою)* вершини u.

<u>Визначення 6.59.</u> Якщо u є одночасно батьком v і v', то v і v' називаються *братами (сестрами)*.

<u>Визначення 6.60.</u> Якщо існує орієнтований шлях з вершини u у вершину v, то вершина u називається *предком* вершини v, а вершина v - *нащадком* вершини u.

<u>Приклад 6.31.</u> Визначити батьків і синів, братів, предків і нащадків кореневого орієнтованого дерева, зображеного на рис. 6.56.

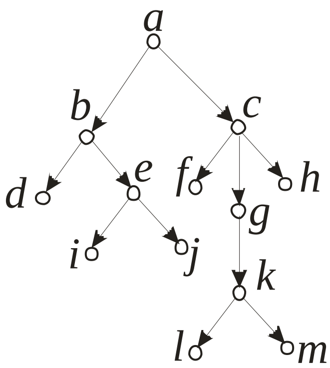


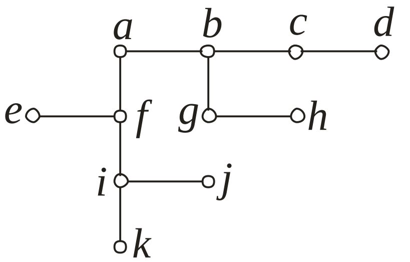
Рис. 6.56.

Розв'язання: a є батьком b і c; b - батьком d і e; c - батьком f, g і h; e - батьком i і j; g - батьком k; k - батьком l і m. І навпаки: b і c - сини a; d і e - сини b; f, g і h - сини c; i і j - сини e; k - син g; l і m - сини k.

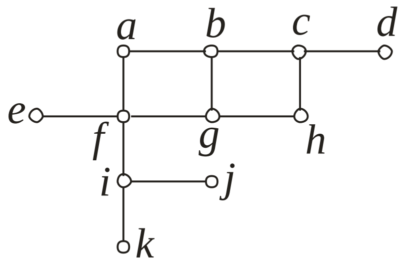
Груп нащадків і предків можна виділити дуже багато, приведемо лише деякі приклади: d, e, i, j - нащадки b, отже, b - предок для d, e, i, j; l є нащадком c, отже, c - предок l.

Вправи:

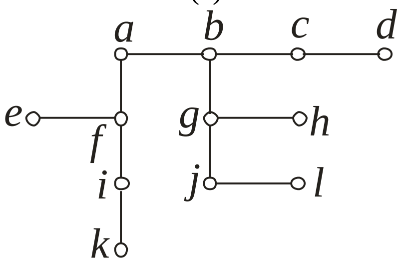
23. Які з наведених на рис. 6.57 (а) − (и) графів є деревами:


a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k

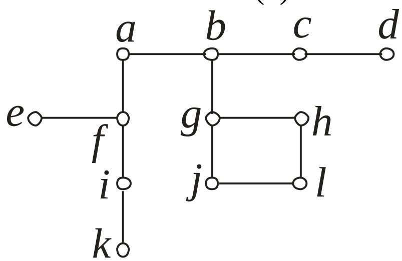
(а)


a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k

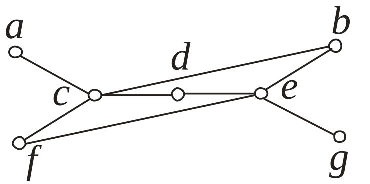
(б)


a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
l

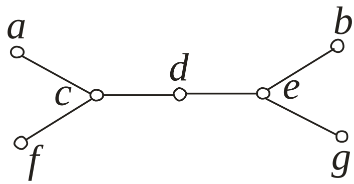
(в)


a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
l

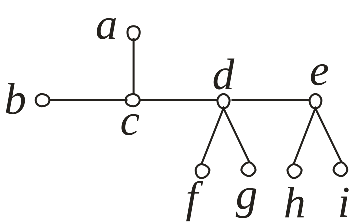
(г)


a
b
c
d
e
f
g

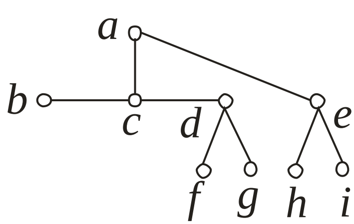
(д)


a
b
c
d
e
f
g

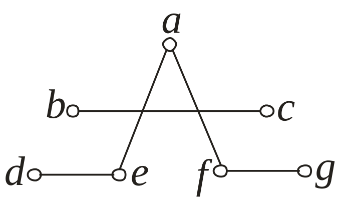
(е)


a
b
c
d
e
f
g
h
i

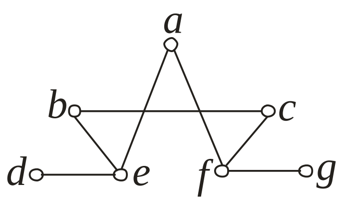
(є)


a
b
c
d
e
f
g
h
i

(ж)



(з)



(и)

Рис. 6.57.

24. Для кожного графа з попередньої вправи:

а) використати як корінь вершину d і намалювати кореневе дерево;

б) намалювати породжене кореневе орієнтоване дерево.

25. Для кореневих орієнтованих дерев, отриманих у завданні 24:

а) знайдіть нащадків вершини c;

б) знайдіть предків вершини e;

в) знайдіть батька вершини f;

г) знайдіть синів вершини d;

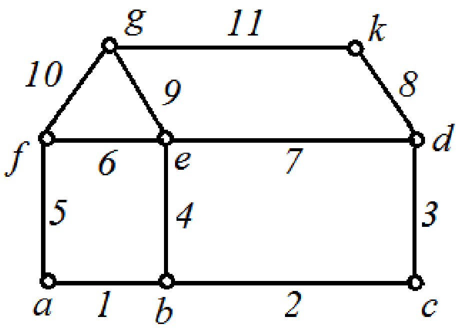
д) знайдіть висоту дерева;

е) знайдіть рівень вершини g;

ж) знайдіть листи дерева.

Тестове завдання до теми «Теорія графів»

1. Дано граф:



- З'ясувати, чи є граф повним;
- Визначити степені вершин графа;
- Задати граф матрицями інцидентності, суміжності, списком ребер.

A:

- ні;
- $\deg(a)=2;\ \deg(b)=3;\ \deg(c)=2;\ \deg(d)=3;\ \deg(e)=4;$ $\deg(f)=3; \deg(g)=3;\ \deg(k)=2$;
- матриця інцидентності:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
c	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
e	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
f	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
k	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1

матриця суміжності:

	a	b	c	d	e	f	g	k
a	0	1	0	0	0	1	0	0
b	1	0	1	0	1	0	0	0
c	0	1	0	1	0	0	0	0
d	0	0	1	0	1	0	0	1
e	0	1	0	1	0	1	1	0
f	1	0	0	0	1	0	1	0
g	0	0	0	0	1	1	0	0
k	0	0	0	1	0	0	1	0

список ребер:

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Вершина	п	a	b	c	b	a	f	d	d	e	f	k
	к	b	c	d	e	f	e	e	k	g	g	g

Б:

- так;
- $\deg(a)=2$; $\deg(b)=3$; $\deg(c)=2$; $\deg(d)=3$; $\deg(e)=4$; $\deg(f)=3$; $\deg(g)=3$; $\deg(k)=2$;
- матриця інцидентності:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
e	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
f	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
k	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1

матриця суміжності:

	a	b	c	d	e	f	g	k
a	0	1	0	0	0	1	0	0
b	1	0	0	0	1	1	0	0
c	0	0	0	1	0	0	0	0
d	0	0	1	0	1	0	0	1
e	0	1	0	1	0	1	1	0
f	1	1	0	0	1	0	1	0
g	0	0	0	0	1	1	0	0
k	0	0	0	1	0	0	1	0

список ребер:

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Вершина	п	a	b	c	b	a	f	d	d	e	f	k
	к	b	f	d	e	f	e	e	k	g	g	g

C:

- ні;
- $\deg(a)=2$; $\deg(b)=3$; $\deg(c)=2$; $\deg(d)=3$; $\deg(e)=4$; $\deg(f)=3$; $\deg(g)=2$; $\deg(k)=3$;
- матриця інцидентності:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
c	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
e	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
f	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

k	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1

матриця суміжності:

	a	b	c	d	e	f	g	k
a	0	1	0	0	0	1	0	1
b	1	0	1	0	1	0	0	0
c	0	1	0	1	0	0	0	0
d	0	0	1	0	1	0	0	1
e	0	1	0	1	0	1	1	0
f	1	0	0	0	1	0	1	0
g	0	0	0	0	1	1	0	0
k	1	0	0	1	0	0	1	0

список ребер:

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Вершина	п	a	b	c	b	a	f	d	d	e	f	k
	к	b	c	d	e	f	e	e	k	g	g	g

Г:

- ні;
- $\deg(a)=2$; $\deg(b)=3$; $\deg(c)=2$; $\deg(d)=3$; $\deg(e)=4$; $\deg(f)=4$; $\deg(g)=4$; $\deg(k)=2$;
- матриця інцидентності:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
c	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
e	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
f	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
k	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1

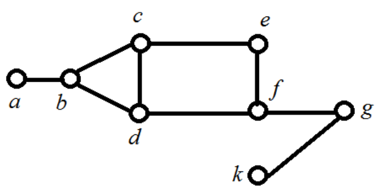
матриця суміжності:

	a	b	c	d	e	f	g	k
a	0	1	0	0	0	1	0	0
b	1	0	1	0	1	0	0	0
c	0	1	0	1	0	0	0	0
d	0	0	1	0	1	0	0	1
e	0	1	0	1	0	1	1	0
f	1	0	0	0	1	0	1	0
g	0	0	0	0	1	1	0	0
k	0	0	0	1	0	0	1	0

список ребер:

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Вершина	п	a	b	c	b	c	f	d	d	e	f	k
	к	b	c	d	e	f	e	e	k	a	g	g

2. Дано граф:



- знайти центр, периферійні першини графа;
- знайти радіус та діаметр графа.

А: $\{c, d, e, f\}$; $\{a,\ k\}$; 3; 6.

Б: $\{b, d, e, f\}$; $\{a,\ k\}$; 3; 5.

В: $\{c, d, e, f\}$; $\{b, k\}$; 3; 5.
Г: $\{c, d, e, f\}$; $\{a, k\}$; 3; 5.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення графа. Що таке орієнтований та неорієнтований граф.
2. Опишіть способи завдання графів.
3. Дайте визначення степенів вершин графів. Якими властивостями вони володіють.
4. Які графи називаються рівними? Які графи називаються ізоморфними?
5. Який граф називається повним?
6. Дайте визначення маршруту, ланцюга, циклу для неорієнтованих та орієнтованих графів.
7. Який граф називається зв'язним? Що таке точки зчленування та мости графів?
8. Як знаходиться відстань між вершинами графа?
9. Який граф називається планарним? Наведіть приклади.
10. Дайте визначення дерева та ліса для орієнтованого та неорієнтованого графів.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ

Глава 1

1. $A = \{x|x = 3n, n \in N, x \leq 100\}$; $A = \{3; 6; 9; 12;15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36; 39; 42; 45; 48; 51; 54; 57; 60; 63; 66; 69; 72; 75; 78; 81; 84; 87; 90; 93; 96; 99\}$. **2.** $A = \{x|\text{облас}-\text{ний центр України}\}$; $A = \{\text{Винниця; Дніпропетровськ; Донецьк; Житомир; Запоріжжя; Івано} - \text{Франківськ; Київ; Кировоград; Луганськ; Луцьк; Львів; Николаїв; Одеса; Полтава; Рівне; Симферопіль; Суми; Тернопіль; Ужгород; Харків; Херсон; Хмельницький; Черкаси; Чернигів; Чернівці}\}$. **3.** $A = \{1; 8; 27; 64\}$. **4.** $A = \{1; 3;5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; 25; 27; 29; 31; 33; 33\}$. **6.** $A = \{x|x = 4n; n \in N; 1 \leq n \leq 10\}$. **7.** $A = \{x|x - \text{місяць весни}\}$. **8.** $A = \{x|x = 5^n; n \in N; 0 \leq n \leq 5\}$. **9.** $P(A) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\}$. **10.** $P(A) = \{\emptyset;\ \{\text{г}\};\ \{\text{с}\};\ \{\text{л}\};\ \{\text{г; с}\}; \{\text{г; л}\};\ \{\text{с; л}\};\ \{\text{г; с; л}\}\}$.**11.** $P(A) = \{\emptyset; \{3\}; \{5\}; \{17\}; \{18\}; \{\{3; 5\}; \{3; 17\}; \{3; 18\}; \{5; 17\}; \{5; 18\};\{17,18\}; \{3; 5; 17\}; \{3; 5; 18\}; \{3; 17; 18\}; \{5; 17; 18\}; \{3; 5; 17; 18\}\}$. **12.** а) $P(A) = \{\emptyset; \{4\}; \{7\}; \{4; 7\}\}$; б) $P(A) = \{\emptyset;\ \{1\};\ \{8\};\{14\}; \{1; 8\}; \{1; 14\}; \{8; 14\}; \{1; 8; 14\}\}$; в) $P(A) = \{\emptyset; \{5\}; \{9\}; \{13\}; \{42\}; \{5; 9\}; \{5; 13\}; \{5; 42\}; \{9; 13\}; \{9; 42\}; \{13; 42\}; \{5; 9; 13\}; \{5; 9; 42\}; \{5; 13; 42\}\{9; 13; 42\}; \{5; 9; 13; 42\}\}$; г) $P(A) = \{\emptyset;\ \{2\};\ \{9\};\ \{11\}; \{37\}; \{45\}; \{2; 9\}; \{2; 11\}; \{2; 37\}; \{2; 45\};\ \{9; 11\}; \{9; 37\}; \{9; 45\}; \{11; 37\}; \{11; 45\}; \{37; 45\}; \{2; 9; 11\}; \{2; 9; 37\}; \{2; 9; 45\}; \{2; 11; 37\};\ \{2; 11; 45\}; \{2; 37; 45\}; \{9; 11; 37\}; \{9; 11; 45\}; \{9; 37; 45\}; \{11; 37; 45\}; \{2; 9; 11; 37\}; \{2; 9; 11; 45\}; \{2; 9; 37; 45\}; \{2; 11; 37; 45\}; \{9; 11; 37; 45\}; \{2; 9; 11; 37; 45\}\}$. **13.** 2^k. **14.** а) і; б) і; в) х; г) і; д) х; е) і. **15.** а) і; б) х; в) х; г) і. **16.** а) 7; б) 4; в) 4; г) 4. **17.** $\{9\};\ \{3\}; \{0; 2; 5; 6; \{6; 9\}\}; \{5; \{6; 9\}; 9\}$. **18.** $\{4; 8\};\ \{0; 1; 4; 8; \{3; 4\}; \{5; 6\}\}$; $\{3; 4; 5; 8\}; \{1; 3; 5\}$. **19.** $\{0; 2; 3; 5; \{1; 2\};$

$\{8;9\}\}$; $\{2;8\}$; $\{3;5;8;\{8,9\}\}$; $\{0;\{1;2\};2;3;5\}$. **20.** $\{1;3;5\}$; $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$; $\{1;3;5\}$; $\{2;4;6;7;9\}$; $\{1;3;5;7;9\}$; $\{1;2;3;4;5;6\}$; $\{2;4;6\}$; $\{2;4;6;7;8;9;10\}$; $\{8;10\}$. **21.** $\{2;8\}$; $\{1;2;3;5;7;8;9\}$; $\{1;3;5;7\}$; $\{1;4;6;7;9;10\}$; $\{4;6;8;9;10\}$; $\{1;2;7;8;9\}$; $\{3;4;5;6;10\}$; $\{2\}$. **22.** $[7;8]$; $[0;2[\cup[6;8]$; $]-\infty;1]\cup]8;+\infty[$. **23.** $(5;7)$; $(1;4)\cup(5;8]$; $(-\infty;1]\cup[7;+\infty)$. **24.** $(-\infty;4]\cup(7;+\infty)$; $[6;8)$; $[2;7]$. **25.** а) x; б) і; в) і; г) і; д) і; е) x; ж) x; з) і. **27.** а) $\bar{A}$; б) $(A\cup B\cup C)-\big((A\cap C)\cup(B\cap C)\big)$; в) $\big((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)\big)-(A\cap B\cap C)$; г) $(A\cup B\cup C)-\big((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)\big)$; д) $(A+B)\cup(A+C)\cup(B+C)\cup(A\cap B\cap C)$; е) $(A\cup B\cup C)-(A\cap B)$; ж) $(A\cup B\cup C)-(A\cap B\cap C)$; з) $\big((A\cap B)-C\big)\cup(A\cap B\cap C)$; і) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$; к) $(A+B)\cup(A\cap B\cap C)$.

Глава 2

1. а) $(R)=\{3;5;6;10\}$; $E(R)=\{x;y;z\}$; б) $D(R)=\{a;b,c\}$ $E(R)=\{2;3;7;9;10\}$; в) $D(R)=\{2;3;4;7\}$; $E(R)=\{2;5;6;11\}$; г) $D(R)=\{1;3;4;9\}$; $E(R)=\{1;5;6;7;9\}$. **2.** а) $x\in[-2;2]$; $y\in[-2;-1]$; б) $x\in[-1;5]$; $y\in[-6;0]$; в) $x\in[-2;3]$; $y\in[-2;1]$; г) $x\in[-3;3]$; $y\in[-2;2]$; д) $x\in[-2;\infty)$; $y\in(-\infty;1]$; е) $x\in(-\infty;10]$; $y\in[0;\infty)$. **3.** $\{\langle 1,-1\rangle;\langle 1,0\rangle;\langle 4,-1\rangle;\langle 4,0\rangle;\langle 5,-1\rangle;\langle 5,0\rangle\}$. **4.** $\{\langle 3,1\rangle;\langle 3,4\rangle;\langle 5,1\rangle;\langle 5,4\rangle;\langle 7,1\rangle;\langle 7,4\rangle\}$. **5.** $\{\langle 3,1\rangle;\langle 3,4\rangle;\langle 3,9\rangle;\langle 3,10\rangle;\langle 5,1\rangle;\langle 5,4\rangle;\langle 5,9\rangle;\langle 5,10\rangle;\langle 7,1\rangle;\langle 7,4\rangle;\langle 7,9\rangle;\langle 7,10\rangle\}$. **6.** $\{\langle 0,1\rangle;\langle 0,2\rangle;\langle 0,3\rangle;\langle 0,4\rangle;\langle 0,5\rangle;\langle 0,6\rangle\}$. **7.** Так. **8.** Так. **9.** Так. **10.** Так. **11.** Так. **12.** $\{\langle 1,2\rangle;\langle 1,4\rangle;\langle 1,6\rangle;\langle 1,10\rangle;\langle 2,1\rangle;\langle 2,3\rangle;\langle 2,5\rangle;\langle 2,9\rangle;\langle 3,2\rangle;\langle 3,4\rangle;\langle 3,8\rangle;\langle 3,10\rangle;\langle 4,1\rangle;\langle 4,3\rangle;\langle 4,7\rangle;\langle 4,9\rangle;\langle 5,2\rangle;\langle 5,6\rangle;\langle 5,8\rangle;\langle 6,1\rangle;\langle 6,5\rangle;\langle 6,7\rangle;\langle 7,4\rangle;\langle 7,6\rangle;\langle 7,10\rangle;\langle 8,3\rangle;\langle 8,5\rangle;\langle 8,9\rangle;\langle 9,2\rangle;\langle 9,4\rangle;\langle 9,8\rangle;\langle 9,10\rangle;\langle 10,1\rangle;\langle 10,3\rangle;\langle 10,7\rangle;\langle 10,9\rangle\}$. **13.** $\{\langle 1,2\rangle;\langle 1,3\rangle;\langle 1,5\rangle;\langle 1,7\rangle;\langle 1,8\rangle;\langle 1,8\rangle;\langle 1,9\rangle;\langle 2,2\rangle;\langle 2,4\rangle;\langle 2,6\rangle;\langle 2,7\rangle;\langle 2,8\rangle;\langle 2,10\rangle;\langle 3,1\rangle;$

$\langle 3,3\rangle; \langle 3,5\rangle; \langle 3,6\rangle; \langle 3,7\rangle; \langle 3,9\rangle; \langle 4,2\rangle; \langle 4,4\rangle; \langle 4,5\rangle; \langle 4,6\rangle; \langle 4,8\rangle;$ $\langle 4,10\rangle; \langle 5,1\rangle; \langle 5,3\rangle; \langle 5,4\rangle; \langle 5,5\rangle; \langle 5,7\rangle; \langle 5,9\rangle; \langle 5,10\rangle; \langle 6,2\rangle;$ $\langle 6,3\rangle; \langle 6,4\rangle; \langle 6,6\rangle; \langle 6,8\rangle; \langle 6,9\rangle; \langle 6,10\rangle; \langle 7,1\rangle; \langle 7,2\rangle; \langle 7,5\rangle; \langle 7,7\rangle;$ $\langle 7,8\rangle; \langle 7,9\rangle; \langle 8,1\rangle; \langle 8,2\rangle; \langle 8,4\rangle; \langle 8,6\rangle; \langle 8,7\rangle; \langle 8,8\rangle; \langle 8,10\rangle; \langle 9,1\rangle;$ $\langle 9,3\rangle; \langle 9,5\rangle; \langle 9,6\rangle; \langle 9,7\rangle; \langle 9,9\rangle; \langle 10,2\rangle; \langle 10,4\rangle; \langle 10,5\rangle; \langle 10,6\rangle;$ $\langle 10,8\rangle; \langle 10,10\rangle\}$. **14.** $\{\langle 1,1\rangle; \langle 1,3\rangle; \langle 1,5\rangle; \langle 1,7\rangle; \langle 1,9\rangle; \langle 2,2\rangle;$ $\langle 2,4\rangle; \langle 2,6\rangle; \langle 2,8\rangle; \langle 2,10\rangle; \langle 3,1\rangle; \langle 3,3\rangle; \langle 3,5\rangle; \langle 3,7\rangle; \langle 3,9\rangle; \langle 4,2\rangle;$ $\langle 4,4\rangle; \langle 4,6\rangle; \langle 4,8\rangle; \langle 4,10\rangle; \langle 5,1\rangle; \langle 5,3\rangle; \langle 5,5\rangle; \langle 5,7\rangle; \langle 5,9\rangle; \langle 6,2\rangle;$ $\langle 6,4\rangle; \langle 6,6\rangle; \langle 6,8\rangle; \langle 6,10\rangle; \langle 7,1\rangle; \langle 7,3\rangle; \langle 7,5\rangle; \langle 7,7\rangle; \langle 7,9\rangle; \langle 8,2\rangle;$ $\langle 8,4\rangle; \langle 8,6\rangle; \langle 8,8\rangle; \langle 8,10\rangle; \langle 9,1\rangle; \langle 9,3\rangle; \langle 9,5\rangle; \langle 9,7\rangle; \langle 9,9\rangle; \langle 10,2\rangle;$ $\langle 10,4\rangle; \langle 10,6\rangle; \langle 10,8\rangle; \langle 10,10\rangle\}$ **15.** $\{\langle 2,2\rangle; \langle 3,3\rangle; \langle 4,2\rangle; \langle 4,4\rangle;$ $\langle 5,5\rangle; \langle 6,2\rangle; \langle 6,3\rangle; \langle 6,6\rangle; \langle 7,7\rangle; \langle 8,2\rangle; \langle 8,4\rangle; \langle 8,8\rangle; \langle 9,9\rangle; \langle 10,2\rangle;$ $\langle 10,10\rangle\}$. **16.** $\{\langle 1,2\rangle; \langle 1,5\rangle; \langle 1,8\rangle; \langle 2,2\rangle; \langle 2,6\rangle; \langle 2,10\rangle; \langle 3,2\rangle;$ $\langle 3,7\rangle; \langle 4,2\rangle; \langle 4,8\rangle; \langle 5,2\rangle; \langle 5,9\rangle; \langle 6,2\rangle; \langle 6,10\rangle; \langle 9,2\rangle; \langle 10,2\rangle\}$. **18.** а) R_3, R_4; б) R_3; в) R_3; г) R_1. **20.** R_1- не рефлексивне, не антирефлексивне, симетричне, не антисиметричне, не транзитивне, не еквівалентне; R_2 - не рефлексивне, не анти- рефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, не транзитивне, не еквівалентне; R_3 - не рефлексивне, антирефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, не транзитивне, не еквівалентне. **21.** $R_1 = \{\langle 1,2\rangle; \langle 1,3\rangle;$ $\langle 2,1\rangle; \langle 2,4\rangle; \langle 2,5\rangle; \langle 3,1\rangle; \langle 3,6\rangle; \langle 3,7\rangle; \langle 3,8\rangle; \langle 4,2\rangle; \langle 5,2\rangle; \langle 5,9\rangle;$ $\langle 6,3\rangle; \langle 7,3\rangle; \langle 7,10\rangle; \langle 7,11\rangle; \langle 8,3\rangle; \langle 9,5\rangle; \langle 10,7\rangle; \langle 11,7\rangle\}$; - не рефлексивне, антирефлексивне, симетричне, не антисиметричне, не транзитивне, не еквівалентне; $R_2 =$ $\{\langle 1,2\rangle; \langle 1,3\rangle; \langle 1,4\rangle; \langle 1,5\rangle; \langle 1,6\rangle; \langle 1,7\rangle; \langle 1,8\rangle; \langle 1,9\rangle; \langle 1,10\rangle; \langle 1,11\rangle;$ $\langle 2,4\rangle; \langle 2,5\rangle; \langle 2,9\rangle; \langle 3,6\rangle; \langle 3,7\rangle; \langle 3,8\rangle; \langle 3,10\rangle; \langle 3,11\rangle; \langle 5,9\rangle; \langle 7,10\rangle;$ $\langle 7,11\rangle\}$; - не рефлексивне, антирефлексивне, не симетричне, антисиметричне, транзитивне, не еквівалентне; $R_3 = \{\langle 1,2\rangle; \langle 1,3\rangle; \langle 2,4\rangle; \langle 2,5\rangle; \langle 3,6\rangle; \langle 3,7\rangle;$ $\langle 3,8\rangle; \langle 5,9\rangle; \langle 7,10\rangle; \langle 7,11\rangle\}$; - не рефлексивне, антирефлексивне, не симетричне, антисиметричне, не транзитивне, не еквівалентне; $R_4 = \{\langle б, м\rangle; \langle б, т\rangle; \langle б, с\rangle; \langle б, д\rangle; \langle м, с\rangle;$

$\langle м, д \rangle$; $\langle т, м \rangle$; $\langle т, с \rangle$; $\langle т, д \rangle$; $\langle д, с \rangle\}$; - не рефлексивне, антирефлексивне, не симетричне, антисиметричне, транзитивне, не еквівалентне; $R_5 = \{\langle т, б \rangle; \langle с, м \rangle; \langle с, т \rangle; \langle д, м \rangle; \langle д, т \rangle\}$; - не рефлексивне, антирефлексивне, не симетричне, антисиметричне, транзитивне, не еквівалентне; $R_6 = \{\langle м, т \rangle; \langle т, м \rangle\}$; - не рефлексивне, антирефлексивне, симетричне, не антисиметричне, не транзитивне, не еквівалентне; $R_7 = \{\langle Хк, Ч \rangle; \langle Ч, Хк \rangle; \langle Хк, Б \rangle; \langle Ч, Б \rangle; \langle Б, Ч \rangle; \langle Д, Г \rangle; \langle Г, Д \rangle; \langle П, Кр \rangle; \langle Кр, П \rangle; \langle Хс, Кх \rangle; \langle Кх, Хс \rangle; \langle Кн, А \rangle; \langle А, Кн \rangle\}$ - не рефлексивне, антирефлексивне, симетричне, не антисиметричне, не транзитивне, не еквівалентне; $R_8 = \{\langle Хк, П \rangle; \langle П, Хк \rangle; \langle Хк, Кр \rangle; \langle Кр, Хк \rangle; \langle Ч, П \rangle; \langle П, Ч \rangle; \langle Ч, Кр \rangle; \langle Кр, Ч \rangle; \langle Б, П \rangle; \langle П, Б \rangle; \langle Б, Кр \rangle; \langle Кр, Б \rangle; \langle Хк, Д \rangle; \langle Д, Хк \rangle; \langle Хк, Г \rangle; \langle Г, Хк \rangle; \langle Ч, Д \rangle; \langle Д, Ч \rangle; \langle Б, Д \rangle; \langle Д, Б \rangle; \langle Б, Г \rangle; \langle Г, Б \rangle; \langle Хк, Кн \rangle \langle Кн, Хк \rangle; \langle Хк, А \rangle; \langle А, Хк \rangle; \langle Ч, Кн \rangle; \langle Кн, Ч \rangle; \langle Ч, А \rangle; \langle А, Ч \rangle; \langle Б, Кн \rangle; \langle Кн, Б \rangle; \langle Б, А \rangle; \langle А, Б \rangle; \langle П, Кн \rangle; \langle Кн, П \rangle; \langle П, А \rangle; \langle А, П \rangle; \langle Кр, Кн \rangle; \langle Кн, Кр \rangle; \langle Кр, А \rangle; \langle А, Кр \rangle\}$ - не рефлексивне, анти-рефлексивне, симетричне, не антисиметричне, не транзитивне, не еквівалентне. **23.** а) $\{\langle 7,1 \rangle; \langle 6,4 \rangle; \langle 6,5 \rangle; \langle 8,2 \rangle\}$ і $\{\langle 10,6 \rangle; \langle 11,6 \rangle; \langle 10,7 \rangle; \langle 13,8 \rangle\}$ б) $\{\langle 1, \Delta \rangle; \langle 4, \Delta \rangle; \langle 5, \Delta \rangle; \langle 2, * \rangle, \langle 2, o \rangle\}$; в) $\{\langle 1,1 \rangle; \langle 4,4 \rangle; \langle 4,5 \rangle; \langle 5,4 \rangle; \langle 5,5 \rangle; \langle 2,2 \rangle\}$ і $\{\langle 6,6 \rangle; \langle 7,7 \rangle; \langle 8,8 \rangle\}$; г) $\{\langle 4, \Delta \rangle; \langle 5, \Delta \rangle; \langle 2, * \rangle, \langle 2, o \rangle\}$; д) $\{\langle 1,10 \rangle, \langle 4,10 \rangle, \langle 4,11 \rangle, \langle 5,10 \rangle, \langle 5,11 \rangle, \langle 2,13 \rangle\}$ і $\emptyset$; е) $\{\langle 10,1 \rangle; \langle 10,4 \rangle; \langle 10,5 \rangle; \langle 11,4 \rangle; \langle 11,5 \rangle; \langle 13,2 \rangle\}$. **24.** $\{\langle a, b \rangle; \langle e, c \rangle; \langle i, d \rangle; \langle o, f \rangle; \langle u, g \rangle\}$; $\{\langle a, 1 \rangle; \langle e, 2 \rangle; \langle i, 3 \rangle; \langle o, 4 \rangle; \langle u, 5 \rangle\}$; $\emptyset$; $\{\langle b, 1 \rangle; \langle c, 2 \rangle; \langle d, 3 \rangle; \langle f, 4 \rangle; \langle g, 5 \rangle\}$. **25.** $\{\langle a, a \rangle; \langle a, b \rangle; \langle b, a \rangle; \langle b, c \rangle; \langle b, d \rangle; \langle c, a \rangle; \langle c, b \rangle; \langle c, e \rangle; \langle d, e \rangle; \langle e, d \rangle\}$; $\{\langle a, b \rangle; \langle b, c \rangle; \langle b, b \rangle; \langle e, e \rangle; \langle b, a \rangle; \langle c, b \rangle; \langle d, d \rangle; \langle a, c \rangle; \langle c, a \rangle\}$; $\{\langle a, a \rangle; \langle b, b \rangle; \langle c, c \rangle; \langle d, d \rangle; \langle a, c \rangle; \langle c, a \rangle\}$. **26.** Істинне; істинне; істинне; хибне. **27.** Істинне; істинне; істинне; істинне. **28.** Істинне; хибне; хибне; істинне. **29.** Істинне; істинне; істинне; хибне. **30.** $\{\langle 2,5 \rangle; \langle 2,7 \rangle; \langle 2,10 \rangle; \langle 5,7 \rangle; \langle 5,10 \rangle; \langle 7,10 \rangle\}$ – не рефлексивне, антирефлексивне, не симетричне, антисиметричне, транзитивне; $\{\langle 5,2 \rangle; \langle 7,2 \rangle; \langle 10,2 \rangle; \langle 7,5 \rangle; \langle 10,5 \rangle; \langle 10,7 \rangle\}$ – не рефлексивне, антирефлексивне, не симетричне, антисиметричне, транзитивне; $\{\langle 2,2\rangle;\langle 5,2\rangle;\langle 5,5\rangle;\langle 7,2\rangle;\langle 7,5\rangle;\langle 7,7\rangle;\langle 10,2\rangle;\langle 10,5\rangle;\langle 10,7\rangle;\langle 10,10\rangle\}$ – рефлексивне, не антирефлексивне, не симетричне, антисиметричне, транзитивне; $\{\langle 2,7\rangle;\langle 2,10\rangle;\langle 5,10\rangle\}$ – не рефлексивне, антирефлексивне, не симетричне, антисиметричне, не транзитивне; $\{\langle 2,5\rangle;\langle 2,7\rangle;\langle 2,10\rangle;\langle 5,7\rangle;\langle 5,10\rangle;\langle 7,10\rangle\}$; $\{\langle 2,2\rangle;\langle 2,5\rangle;\langle 2,7\rangle;\langle 2,10\rangle;\langle 5,5\rangle;\langle 5,7\rangle;\langle 5,10\rangle;\langle 7,7\rangle;\langle 7,10\rangle;\langle 10,10\rangle\}$ – рефлекссивне, не антирефлексивне, не симетричне, антисиметричне, транзитивне. **31.** $\{\langle 1,1\rangle;\langle 2,1\rangle;\langle 3,1\rangle;\langle 4,1\rangle;\langle 5,1\rangle;\langle 6,1\rangle;\langle 7,1\rangle;\langle 8,1\rangle;\langle 9,1\rangle;\langle 10,1\rangle;\langle 2,2\rangle;\langle 3,2\rangle;\langle 4,2\rangle;\langle 5,2\rangle;\langle 6,2\rangle;\langle 7,2\rangle;\langle 8,2\rangle;\langle 9,2\rangle;\langle 10,2\rangle;\langle 3,3\rangle;\langle 4,3\rangle;\langle 5,3\rangle;\langle 6,3\rangle;\langle 7,3\rangle;\langle 8,3\rangle;\langle 9,3\rangle;\langle 10,3\rangle;\langle 4,4\rangle;\langle 5,4\rangle;\langle 6,4\rangle;\langle 7,4\rangle;\langle 8,4\rangle;\langle 9,4\rangle;\langle 10,4\rangle;\langle 5,5\rangle;\langle 6,5\rangle;\langle 7,5\rangle;\langle 8,5\rangle;\langle 9,5\rangle;\langle 10,5\rangle;\langle 6,6\rangle;\langle 7,6\rangle;\langle 8,6\rangle;\langle 9,6\rangle;\langle 10,6\rangle;\langle 7,7\rangle;\langle 8,7\rangle;\langle 9,7\rangle;\langle 10,7\rangle;\langle 8,8\rangle;\langle 9,8\rangle;\langle 10,8\rangle;\langle 9,9\rangle;\langle 10,9\rangle;\langle 10,10\rangle\}$; $\{\langle 1,1\rangle;\langle 1,2\rangle;\langle 1,3\rangle;\langle 1,4\rangle;\langle 1,5\rangle;\langle 1,6\rangle;\langle 1,7\rangle;\langle 1,8\rangle;\langle 1,9\rangle;\langle 1,10\rangle;\langle 2,1\rangle;\langle 2,2\rangle;\langle 2,3\rangle;\langle 2,4\rangle;\langle 2,5\rangle;\langle 2,6\rangle;\langle 2,7\rangle;\langle 2,8\rangle;\langle 2,9\rangle;\langle 2,10\rangle;\langle 3,1\rangle;\langle 3,2\rangle;\langle 3,3\rangle;\langle 3,4\rangle;\langle 3,5\rangle;\langle 3,6\rangle;\langle 3,7\rangle;\langle 3,8\rangle;\langle 3,9\rangle;\langle 3,10\rangle;\langle 4,1\rangle;\langle 4,2\rangle;\langle 4,3\rangle;\langle 4,4\rangle;\langle 4,5\rangle;\langle 4,6\rangle;\langle 4,7\rangle;\langle 4,8\rangle;\langle 4,9\rangle;\langle 4,10\rangle;\langle 5,1\rangle;\langle 5,2\rangle;\langle 5,3\rangle;\langle 5,4\rangle;\langle 5,5\rangle;\langle 5,6\rangle;\langle 5,7\rangle;\langle 5,8\rangle;\langle 5,9\rangle;\langle 5,10\rangle;\langle 6,1\rangle;\langle 6,2\rangle;\langle 6,3\rangle;\langle 6,4\rangle;\langle 6,5\rangle;\langle 6,6\rangle;\langle 6,7\rangle;\langle 6,8\rangle;\langle 6,9\rangle;\langle 6,10\rangle;\langle 7,1\rangle;\langle 7,2\rangle;\langle 7,3\rangle;\langle 7,4\rangle;\langle 7,5\rangle;\langle 7,6\rangle;\langle 7,7\rangle;\langle 7,8\rangle;\langle 7,9\rangle;\langle 7,10\rangle;\langle 8,1\rangle;\langle 8,2\rangle;\langle 8,3\rangle;\langle 8,4\rangle;\langle 8,5\rangle;\langle 8,6\rangle;\langle 8,7\rangle;\langle 8,8\rangle;\langle 8,9\rangle;\langle 8,10\rangle;\langle 9,1\rangle;\langle 9,2\rangle;\langle 9,3\rangle;\langle 9,4\rangle;\langle 9,5\rangle;\langle 9,6\rangle;\langle 9,7\rangle;\langle 9,8\rangle;\langle 9,9\rangle;\langle 9,10\rangle;\langle 10,1\rangle;\langle 10,2\rangle;\langle 10,3\rangle;\langle 10,4\rangle;\langle 10,5\rangle;\langle 10,6\rangle;\langle 10,7\rangle;\langle 10,8\rangle;\langle 10,9\rangle;\langle 10,10\rangle\}$; $\{\langle 1,1\rangle;\langle 1,2\rangle;\langle 1,3\rangle;\langle 1,4\rangle;\langle 1,5\rangle;\langle 1,6\rangle;\langle 1,7\rangle;\langle 1,8\rangle;\langle 1,9\rangle;\langle 1,10\rangle;\langle 2,2\rangle;\langle 2,3\rangle;\langle 2,4\rangle;\langle 2,5\rangle;\langle 2,6\rangle;\langle 2,7\rangle;\langle 2,8\rangle;\langle 2,9\rangle;\langle 2,10\rangle;\langle 3,3\rangle;\langle 3,4\rangle;\langle 3,5\rangle;\langle 3,6\rangle;\langle 3,7\rangle;\langle 3,8\rangle;\langle 3,9\rangle;\langle 3,10\rangle;\langle 4,4\rangle;\langle 4,5\rangle;\langle 4,6\rangle;\langle 4,7\rangle;\langle 4,8\rangle;\langle 4,9\rangle;\langle 4,10\rangle;\langle 5,5\rangle;\langle 5,6\rangle;\langle 5,7\rangle;\langle 5,8\rangle;\langle 5,9\rangle;\langle 5,10\rangle;\langle 6,6\rangle;\langle 6,7\rangle;\langle 6,8\rangle;\langle 6,9\rangle;\langle 6,10\rangle;\langle 7,7\rangle;\langle 7,8\rangle;\langle 7,9\rangle;\langle 7,10\rangle;\langle 8,8\rangle;\langle 8,9\rangle;\langle 8,10\rangle;\langle 9,9\rangle;\langle 9,10\rangle;\langle 10,10\rangle\}$; $\{\langle 1,1\rangle;\langle 2,2\rangle;\langle 3,3\rangle;\langle 4,4\rangle;\langle 5,5\rangle;\langle 6,6\rangle;\langle 7,7\rangle;\langle 8,8\rangle;\langle 9,9\rangle;\langle 10,10\rangle\}$; $\emptyset$; $\emptyset$; $\{\langle 1,2\rangle;\langle 1,3\rangle;\langle 1,4\rangle;\langle 1,5\rangle;$

$\langle 1,6\rangle; \langle 1,7\rangle; \langle 1,8\rangle; \langle 1,9\rangle; \langle 1,10\rangle; \langle 2,3\rangle; \langle 2,4\rangle; \langle 2,5\rangle; \langle 2,6\rangle; \langle 2,7\rangle;$
$\langle 2,8\rangle; \langle 2,9\rangle; \langle 2,10\rangle; \langle 3,4\rangle; \langle 3,5\rangle; \langle 3,6\rangle; \langle 3,7\rangle; \langle 3,8\rangle; \langle 3,9\rangle; \langle 3,10\rangle;$
$\langle 4,5\rangle; \langle 4,6\rangle; \langle 4,7\rangle; \langle 4,8\rangle; \langle 4,9\rangle; \langle 4,10\rangle; \langle 5,6\rangle; \langle 5,7\rangle; \langle 5,8\rangle; \langle 5,9\rangle;$
$\langle 5,10\rangle; \langle 6,7\rangle; \langle 6,8\rangle; \langle 6,9\rangle; \langle 6,10\rangle; \langle 7,8\rangle; \langle 7,9\rangle; \langle 7,10\rangle; \langle 8,9\rangle;$
$\langle 8,10\rangle; 9,10\};$ $\{\langle 1,2\rangle; \langle 1,3\rangle; \langle 1,4\rangle; \langle 1,5\rangle; \langle 1,6\rangle; \langle 1,7\rangle; \langle 1,8\rangle;$
$\langle 1,9\rangle; \langle 1,10\rangle; \langle 2,1\rangle; \langle 2,3\rangle; \langle 2,4\rangle; \langle 2,5\rangle; \langle 2,6\rangle; \langle 2,7\rangle; \langle 2,8\rangle; \langle 2,9\rangle;$
$\langle 2,10\rangle; \langle 3,1\rangle; \langle 3,2\rangle; \langle 3,4\rangle; \langle 3,5\rangle; \langle 3,6\rangle; \langle 3,7\rangle; \langle 3,8\rangle; \langle 3,9\rangle; \langle 3,10\rangle;$
$\langle 4,1\rangle; \langle 4,2\rangle; \langle 4,3\rangle; \langle 4,5\rangle; \langle 4,6\rangle; \langle 4,7\rangle; \langle 4,8\rangle; \langle 4,9\rangle; \langle 4,10\rangle; \langle 5,1\rangle;$
$\langle 5,2\rangle; \langle 5,3\rangle; \langle 5,4\rangle; \langle 5,6\rangle; \langle 5,7\rangle; \langle 5,8\rangle; \langle 5,9\rangle; \langle 5,10\rangle; \langle 6,1\rangle; \langle 6,2\rangle;$
$\langle 6,3\rangle; \langle 6,4\rangle; \langle 6,5\rangle; \langle 6,7\rangle; \langle 6,8\rangle; \langle 6,9\rangle; \langle 6,10\rangle; \langle 7,1\rangle; \langle 7,2\rangle; \langle 7,3\rangle;$
$\langle 7,4\rangle; \langle 7,5\rangle; \langle 7,6\rangle; \langle 7,8\rangle; \langle 7,9\rangle; \langle 7,10\rangle; \langle 8,1\rangle; \langle 8,2\rangle; \langle 8,3\rangle; \langle 8,4\rangle;$
$\langle 8,5\rangle; \langle 8,6\rangle; \langle 8,7\rangle; \langle 8,9\rangle; \langle 8,10\rangle; \langle 9,1\rangle; \langle 9,2\rangle; \langle 9,3\rangle; \langle 9,4\rangle; \langle 9,5\rangle;$
$\langle 9,6\rangle; \langle 9,7\rangle; \langle 9,8\rangle; \langle 9,10\rangle; \langle 10,1\rangle; \langle 10,2\rangle; \langle 10,3\rangle; \langle 10,4\rangle; \langle 10,5\rangle;$
$\langle 10,6\rangle; \langle 10,7\rangle; \langle 10,8\rangle; \langle 10,9\rangle\};$ $\{\langle 1,1\rangle; \langle 2,1\rangle; \langle 3,1\rangle; \langle 4,1\rangle; \langle 5,1\rangle;$
$\langle 6,1\rangle; \langle 7,1\rangle; \langle 8,1\rangle; \langle 9,1\rangle; \langle 10,1\rangle; \langle 2,2\rangle; \langle 3,2\rangle; \langle 4,2\rangle; \langle 5,2\rangle; \langle 6,2\rangle;$
$\langle 7,2\rangle; \langle 8,2\rangle; \langle 9,2\rangle; \langle 10,2\rangle; \langle 3,3\rangle; \langle 4,3\rangle; \langle 5,3\rangle; \langle 6,3\rangle; \langle 7,3\rangle; \langle 8,3\rangle;$
$\langle 9,3\rangle; \langle 10,3\rangle; \langle 4,4\rangle; \langle 5,4\rangle; \langle 6,4\rangle; \langle 7,4\rangle; \langle 8,4\rangle; \langle 9,4\rangle; \langle 10,4\rangle; \langle 5,5\rangle;$
$\langle 6,5\rangle; \langle 7,5\rangle; \langle 8,5\rangle; \langle 9,5\rangle; \langle 10,5\rangle; \langle 6,6\rangle; \langle 7,6\rangle; \langle 8,6\rangle; \langle 9,6\rangle; \langle 10,6\rangle;$
$\langle 7,7\rangle; \langle 8,7\rangle; \langle 9,7\rangle; \langle 10,7\rangle; \langle 8,8\rangle; \langle 9,8\rangle; \langle 10,8\rangle; \langle 9,9\rangle; \langle 10,9\rangle;$
$\langle 10,10\rangle\};$ $\{\langle 1,1\rangle; \langle 1,2\rangle; \langle 1,3\rangle; \langle 1,4\rangle; \langle 1,5\rangle; \langle 1,6\rangle; \langle 1,7\rangle; \langle 1,8\rangle;$
$\langle 1,9\rangle; \langle 1,10\rangle; \langle 2,2\rangle; \langle 2,3\rangle; \langle 2,4\rangle; \langle 2,5\rangle; \langle 2,6\rangle; \langle 2,7\rangle; \langle 2,8\rangle; \langle 2,9\rangle;$
$\langle 2,10\rangle; \langle 3,3\rangle; \langle 3,4\rangle; \langle 3,5\rangle; \langle 3,6\rangle; \langle 3,7\rangle; \langle 3,8\rangle; \langle 3,9\rangle; \langle 3,10\rangle; \langle 4,4\rangle;$
$\langle 4,5\rangle; \langle 4,6\rangle; \langle 4,7\rangle; \langle 4,8\rangle; \langle 4,9\rangle; \langle 4,10\rangle; \langle 5,5\rangle; \langle 5,6\rangle; \langle 5,7\rangle; \langle 5,8\rangle;$
$\langle 5,9\rangle; \langle 5,10\rangle; \langle 6,6\rangle; \langle 6,7\rangle; \langle 6,8\rangle; \langle 6,9\rangle; \langle 6,10\rangle; \langle 7,7\rangle; \langle 7,8\rangle; \langle 7,9\rangle;$
$\langle 7,10\rangle; \langle 8,8\rangle; \langle 8,9\rangle; \langle 8,10\rangle; \langle 9,9\rangle; \langle 9,10\rangle; \langle 10,10\rangle\};$ $\{\langle 1,1\rangle;$
$\langle 2,2\rangle; \langle 3,3\rangle; \langle 4,4\rangle; \langle 5,5\rangle; \langle 6,6\rangle; \langle 7,7\rangle; \langle 8,8\rangle; \langle 9,9\rangle; \langle 10,10\rangle\};$
$\{\langle 2,1\rangle; \langle 3,1\rangle; \langle 4,1\rangle; \langle 5,1\rangle; \langle 6,1\rangle; \langle 7,1\rangle; \langle 8,1\rangle; \langle 9,1\rangle; \langle 10,1\rangle; \langle 3,2\rangle;$
$\langle 4,2\rangle; \langle 5,2\rangle; \langle 6,2\rangle; \langle 7,2\rangle; \langle 8,2\rangle; \langle 9,2\rangle; \langle 10,2\rangle; \langle 4,3\rangle; \langle 5,3\rangle; \langle 6,3\rangle;$
$\langle 7,3\rangle; \langle 8,3\rangle; \langle 9,3\rangle; \langle 10,3\rangle; \langle 5,4\rangle; \langle 6,4\rangle; \langle 7,4\rangle; \langle 8,4\rangle; \langle 9,4\rangle; \langle 10,4\rangle;$
$\langle 6,5\rangle; \langle 7,5\rangle; \langle 8,5\rangle; \langle 9,5\rangle; \langle 10,5\rangle; \langle 7,6\rangle; \langle 8,6\rangle; \langle 9,6\rangle; \langle 10,6\rangle; \langle 8,7\rangle;$
$\langle 9,7\rangle; \langle 10,7\rangle; \langle 9,8\rangle; \langle 10,8\rangle; \langle 10,9\rangle\};$ $\{\langle 1,1\rangle; \langle 2,1\rangle; \langle 3,1\rangle; \langle 4,1\rangle;$
$\langle 5,1\rangle; \langle 6,1\rangle; \langle 7,1\rangle; \langle 8,1\rangle; \langle 9,1\rangle; \langle 10,1\rangle; \langle 2,2\rangle; \langle 3,2\rangle; \langle 4,2\rangle; \langle 5,2\rangle;$
$\langle 6,2\rangle; \langle 7,2\rangle; \langle 8,2\rangle; \langle 9,2\rangle; \langle 10,2\rangle; \langle 3,3\rangle; \langle 4,3\rangle; \langle 5,3\rangle; \langle 6,3\rangle; \langle 7,3\rangle;$

⟨8,3⟩; ⟨9,3⟩; ⟨10,3⟩; ⟨4,4⟩; ⟨5,4⟩; ⟨6,4⟩; ⟨7,4⟩; ⟨8,4⟩; ⟨9,4⟩; ⟨10,4⟩; ⟨5,5⟩; ⟨6,5⟩; ⟨7,5⟩; ⟨8,5⟩; ⟨9,5⟩; ⟨10,5⟩; ⟨6,6⟩; ⟨7,6⟩; ⟨8,6⟩; ⟨9,6⟩; ⟨10,6⟩; ⟨7,7⟩; ⟨8,7⟩; ⟨9,7⟩; ⟨10,7⟩; ⟨8,8⟩; ⟨9,8⟩; ⟨10,8⟩; ⟨9,9⟩; ⟨10,9⟩; ⟨10,10⟩}; {⟨1,1⟩;⟨2,2⟩; ⟨3,3⟩; ⟨4,4⟩; ⟨5,5⟩; ⟨6,6⟩; ⟨7,7⟩; ⟨8,8⟩; ⟨9,9⟩; ⟨10,10⟩}; {⟨1,2⟩; ⟨1,3⟩; ⟨1,4⟩; ⟨1,5⟩; ⟨1,6⟩;⟨1,7⟩; ⟨1,8⟩; ⟨1,9⟩; ⟨1,10⟩; ⟨2,3⟩; ⟨2,4⟩; ⟨2,5⟩; ⟨2,6⟩; ⟨2,7⟩; ⟨2,8⟩; ⟨2,9⟩; ⟨2,10⟩; ⟨3,4⟩; ⟨3,5⟩; ⟨3,6⟩; ⟨3,7⟩; ⟨3,8⟩; ⟨3,9⟩; ⟨3,10⟩; ⟨4,5⟩; ⟨4,6⟩; ⟨4,7⟩; ⟨4,8⟩; ⟨4,9⟩; ⟨4,10⟩; ⟨5,6⟩; ⟨5,7⟩; ⟨5,8⟩; ⟨5,9⟩; ⟨5,10⟩; ⟨6,7⟩; ⟨6,8⟩; ⟨6,9⟩; ⟨6,10⟩; ⟨7,8⟩; ⟨7,9⟩; ⟨7,10⟩; ⟨8,9⟩; ⟨8,10⟩; 9,10}; {⟨1,1⟩; ⟨2,1⟩; ⟨3,1⟩; ⟨4,1⟩; ⟨5,1⟩; ⟨6,1⟩; ⟨7,1⟩; ⟨8,1⟩; ⟨9,1⟩; ⟨10,1⟩; ⟨2,2⟩; ⟨3,2⟩; ⟨4,2⟩; ⟨5,2⟩; ⟨6,2⟩; ⟨7,2⟩; ⟨8,2⟩; ⟨9,2⟩; ⟨10,2⟩; ⟨3,3⟩; ⟨4,3⟩; ⟨5,3⟩; ⟨6,3⟩; ⟨7,3⟩; ⟨8,3⟩; ⟨9,3⟩; ⟨10,3⟩; ⟨4,4⟩; ⟨5,4⟩; ⟨6,4⟩; ⟨7,4⟩; ⟨8,4⟩; ⟨9,4⟩; ⟨10,4⟩; ⟨5,5⟩; ⟨6,5⟩; ⟨7,5⟩; ⟨8,5⟩; ⟨9,5⟩; ⟨10,5⟩; ⟨6,6⟩; ⟨7,6⟩; ⟨8,6⟩; ⟨9,6⟩; ⟨10,6⟩; ⟨7,7⟩; ⟨8,7⟩; ⟨9,7⟩; ⟨10,7⟩; ⟨8,8⟩; ⟨9,8⟩; ⟨10,8⟩; ⟨9,9⟩; ⟨10,9⟩; ⟨10,10⟩}; {⟨1,1⟩; ⟨2,2⟩; ⟨3,3⟩; ⟨5,5⟩; ⟨4,4⟩; ⟨6,6⟩; ⟨7,7⟩; ⟨8,8⟩; ⟨9,9⟩; ⟨10,10⟩}; {⟨1,1⟩;⟨1,2⟩; ⟨1,3⟩; ⟨1,4⟩; ⟨1,5⟩; ⟨1,6⟩; ⟨1,7⟩; ⟨1,8⟩; ⟨1,9⟩; ⟨1,10⟩; ⟨2,2⟩; ⟨2,3⟩; ⟨2,4⟩; ⟨2,5⟩; ⟨2,6⟩; ⟨2,7⟩; ⟨2,8⟩; ⟨2,9⟩; ⟨2,10⟩; ⟨3,3⟩; ⟨3,4⟩; ⟨3,5⟩; ⟨3,6⟩; ⟨3,7⟩; ⟨3,8⟩; ⟨3,9⟩; ⟨3,10⟩; ⟨4,4⟩; ⟨4,5⟩; ⟨4,6⟩; ⟨4,7⟩; ⟨4,8⟩; ⟨4,9⟩; ⟨4,10⟩; ⟨5,5⟩; ⟨5,6⟩; ⟨5,7⟩; ⟨5,8⟩; ⟨5,9⟩; ⟨5,10⟩; ⟨6,6⟩; ⟨6,7⟩; ⟨6,8⟩; ⟨6,9⟩; ⟨6,10⟩; ⟨7,7⟩; ⟨7,8⟩; ⟨7,9⟩; ⟨7,10⟩; ⟨8,8⟩; ⟨8,9⟩; ⟨8,10⟩; ⟨9,9⟩; ⟨9,10⟩; ⟨10,10⟩}. **32.** {⟨1,1⟩; ⟨1,2⟩; ⟨1,3⟩; ⟨1,4⟩; ⟨1,5⟩; ⟨2,1⟩; ⟨2,2⟩; ⟨2,3⟩; ⟨2,4⟩; ⟨2,5⟩; ⟨3,1⟩; ⟨3,2⟩; ⟨3,3⟩; ⟨3,4⟩; ⟨3,5⟩; ⟨4,1⟩; ⟨4,2⟩; ⟨4,3⟩; ⟨4,4⟩; ⟨4,5⟩; ⟨5,1⟩; ⟨5,2⟩; ⟨5,3⟩; ⟨5,4⟩; ⟨5,5⟩; ⟨6,6⟩; ⟨6,7⟩; ⟨6,8⟩; ⟨6,9⟩; ⟨7,6⟩; ⟨7,7⟩; ⟨7,8⟩; ⟨7,9⟩; ⟨8,6⟩; ⟨8,7⟩; ⟨8,8⟩; ⟨8,9⟩; ⟨9,6⟩; ⟨9,7⟩; ⟨9,8⟩; ⟨9,9⟩; ⟨10,10⟩; ⟨10,11⟩; ⟨10,12⟩; ⟨11,10⟩; ⟨11,11⟩; ⟨11,12⟩; ⟨12,10⟩; ⟨12,11⟩; ⟨12,12⟩}; {⟨1,1⟩; ⟨1,2⟩; ⟨1,3⟩; ⟨1,4⟩; ⟨1,5⟩; ⟨2,1⟩; ⟨2,2⟩; ⟨2,3⟩; ⟨2,4⟩; ⟨2,5⟩; ⟨3,1⟩; ⟨3,2⟩; ⟨3,3⟩; ⟨3,4⟩; ⟨3,5⟩; ⟨4,1⟩; ⟨4,2⟩; ⟨4,3⟩; ⟨4,4⟩; ⟨4,5⟩; ⟨5,1⟩; ⟨5,2⟩; ⟨5,3⟩; ⟨5,4⟩; ⟨5,5⟩; ⟨6,6⟩; ⟨6,7⟩; ⟨6,8⟩; ⟨6,9⟩; ⟨7,6⟩; ⟨7,7⟩; ⟨7,8⟩; ⟨7,9⟩; ⟨8,6⟩; ⟨8,7⟩; ⟨8,8⟩; ⟨8,9⟩; ⟨9,6⟩; ⟨9,7⟩; ⟨9,8⟩; ⟨9,9⟩; ⟨10,10⟩; ⟨10,11⟩; ⟨10,12⟩; ⟨11,10⟩; ⟨11,11⟩; ⟨11,12⟩; ⟨12,10⟩; ⟨12,11⟩; ⟨12,12⟩}. **33.** Не рефлексивне, не антирефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, не транзитивне; $\{\langle a,a\rangle;\langle a,b\rangle;\langle a,c\rangle;\langle a,d\rangle;\langle b,b\rangle;\langle b,c\rangle;\langle b,d\rangle;\langle c,b\rangle;\langle c,c\rangle;$ $\langle c,d\rangle;\langle d,b\rangle\}$. **34.** R_1 - не рефлексивне, не антирефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, не транзитивне; R_2 - не рефлексивне, антирефлексивне, симетричне, не антисиметричне, не транзитивне; $R_1 \cup R_2 = \{\langle a,b\rangle;\langle b,a\rangle;$ $\langle b,c\rangle;\langle b,d\rangle;\langle c,b\rangle;\langle c,c\rangle;\langle d,a\rangle;\langle d,b\rangle\}$; $R_1 \cap R_2 = \{\langle a,b\rangle;$ $\langle b,a\rangle\}$; $R_1 - R_2 = \{\langle b,c\rangle;\langle c,b\rangle;\langle c,c\rangle;\langle d,a\rangle\}$; $R_2 - R_1 = \{\langle b,d\rangle;\langle d,b\rangle\}$; $R_1{}^\circ R_2 = \{\langle a,a\rangle;\langle a,c\rangle;\langle b,a\rangle;\langle b,b\rangle;\langle d,a\rangle;$ $\langle d,c\rangle\}$; $R_2{}^\circ R_1 = \{\langle a,a\rangle;\langle a,d\rangle;\langle b,b\rangle;\langle c,a\rangle;\langle c,b\rangle;\langle c,c\rangle;\langle c,d\rangle;$ $\langle d,b\rangle\}$. **35.** а) рефлексивне, антисиметричне, транзитивне, $R^{-1} = \{\langle a,a\rangle;\langle b,a\rangle;\langle b,b\rangle;\langle b,c\rangle;\langle c,c\rangle\}$; $\bar{R} = \{\langle a,c\rangle;\langle b,a\rangle;$ $\langle b,c\rangle;\langle c,a\rangle\}$; $R^{(2)} = \{\langle a,b\rangle;\langle c,b\rangle\}$; $R^o = R^* = R$; б) антирефлексивне, симетричне, не транзитивне, $R^{-1} = \{\langle a,b\rangle;\langle b,a\rangle\}$, $\bar{R} = \{\langle a,a\rangle;\langle a,c\rangle;\langle b,b\rangle;\langle b,c\rangle;\langle c,a\rangle;\langle c,b\rangle;$ $\langle c,c\rangle\}$, $R^{(2)} = \emptyset$, $R^o = \{\langle a,a\rangle;\langle a,b\rangle;\langle b,a\rangle;\langle b,b\rangle\}$, $R^* = \{\langle a,a\rangle;\langle a,b\rangle;\langle b,a\rangle;\langle b,b\rangle;\langle c,c\rangle\}$; в) рефлексивне, симетричне, транзитивне, $\bar{R} = \{\langle a,b\rangle;\langle b,a\rangle;\langle b,c\rangle;\langle c,b\rangle\}$; $R^{(2)} = R^{-1} = R^o = R^* = R$ г) не рефлексивне, не антирефлексивне, симетричне, не транзитивне, $R^{-1} = R$; $\bar{R} = \{\langle a,a\rangle;\ \langle a,b\rangle;\langle b,a\rangle;\langle b,c\rangle;\langle c,b\rangle;\langle c,c\rangle\}$, $R^{(2)} = \{\langle b,b\rangle\}$, $R^o = R^* = \{\langle a,a\rangle;\langle a,c\rangle;\langle b,b\rangle;\langle c,a\rangle;\langle c,c\rangle\}$. **36.** а) R_1 - рефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, не транзитивне, R_2 — не рефлексивне, не антирефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, не транзитивне, $R_1 \cup R_2 = \{\langle a,a\rangle;\langle a,b\rangle;\langle a,d\rangle;\langle b,a\rangle;\langle b,b\rangle;\langle b,c\rangle;\langle b,d\rangle;\langle c,a\rangle;\langle c,c\rangle;$ $\langle d,a\rangle;\langle d,b\rangle;\langle d,d\rangle\}$ — рефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, не транзитивне, $R_1 \cap R_2 = \{\langle a,d\rangle;\langle b,b\rangle;\langle c,c\rangle\}$ — не рефлексивне, не антирефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, не транзитивне, $R_1 - R_2 = \{\langle a,b\rangle;\langle c,a\rangle;\langle d,b\rangle;\langle d,d\rangle\}$ — не рефлексивне, не антирефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, не транзитивне, $R_2 - R_1 = \{\langle b,a\rangle;\langle b,c\rangle;$ $\langle b,d\rangle;\langle d,a\rangle\}$ —

антирефлексивне, антисиметричне, не транзитивне, $R_1 \circ R_2 = \{\langle a,b\rangle; \langle a,d\rangle; \langle b,a\rangle; \langle b,b\rangle; \langle b,d\rangle; \langle b,b\rangle; \langle b,a\rangle; \langle b,c\rangle;$ $\langle c,a\rangle; \langle c,c\rangle; \langle d,a\rangle; \langle d,b\rangle; \langle d,d\rangle\} -$ не рефлексивне, не антирефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, не транзитивне, $R_2 \circ R_1 = \{\langle a,a\rangle; \langle a,b\rangle; \langle a,c\rangle; \langle a,d\rangle; \langle b,a\rangle;$ $\langle b,b\rangle; \langle b,c\rangle; \langle b,d\rangle; \langle c,c\rangle; \langle c,d\rangle; \langle d,a\rangle; \langle d,b\rangle; \{d,c\}; \langle d,d\rangle\} -$ рефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, транзитивне; б) $R_1 -$ не рефлексивне,не антирефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, не транзитивне, $R_2 -$ антирефлексивне, антисиметричне, не транзитивне, $R_1 \cup R_2 = \{\langle a,b\rangle; \langle b,a\rangle; \langle b,c\rangle; \langle b,d\rangle; \langle c,b\rangle; \langle c,c\rangle; \langle d,a\rangle;$ $\langle d,c\rangle; \langle d,d\rangle\} -$ не рефлексивне, не антирефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, не транзитивне, $R_1 \cap R_2 = \{\langle a,b\rangle; \langle b,d\rangle; \langle c,b\rangle\} -$ антирефлексивне, антисиметричне, не транзитивне, $R_1 - R_2 = \{\langle b,a\rangle; \langle b,c\rangle; \langle c,c\rangle; \langle d,d\rangle\} -$ не рефлексивне, не антирефлексивне, антисиметричне, транзитивне, $R_2 - R_1 = \{\langle d,a\rangle; \langle d,c\rangle\} -$ антирефлексивне, антисиметричне, не транзитивне, $R_1 \circ R_2 = \{\langle a,a\rangle; \langle a,c\rangle;$ $\langle a,d\rangle; \langle b,d\rangle; \langle c,a\rangle; \langle c,c\rangle; \langle c,d\rangle; \langle d,b\rangle; \langle d,c\rangle\} -$ не рефлекс-сивне, не антирефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, не транзитивне, $R_2 \circ R_1 = \{\langle a,b\rangle; \langle b,a\rangle;$ $\langle b,b\rangle; \langle b,c\rangle; \langle c,b\rangle; \langle c,d\rangle; \langle d,a\rangle; \langle d,c\rangle\} -$ не рефлексивне, не антирефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, не транзитивне. **37.** а) $(-\infty; +\infty)$; $[9;+\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; $\left(0; \frac{1}{9}\right)$; в) $(-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$; $\left[-\frac{1}{9}; 0\right) \cup$ $(0; +\infty)$; г) $(9; +\infty)$; $(0; +\infty)$; д) $[9; +\infty)$; $[0; +\infty)$; е) $(-\infty; +\infty)$; $[0; +\infty)$. **38.** а) функція, взаємнооднозначна, $y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$; б) функція, не взаємнооднозначна; в) не функція; г) функція, взаємнооднозначна, $y = e^x$; д) функція, взаємнооднозначна,

$f^{-1}=\left\{\langle x,y\rangle \middle| \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1,\quad x,y\in R^+\right\}$; е) функція, взаємно-однозначна, $y=\ln x$; ж) функція, взаємнооднозначна, $5x+4y-20=0$. **39.** а) $(2x+7)^3-8$; $2(x^3-8)+7$; б) $\sqrt{(x-5)^2+3}$; $\sqrt{x^2+3}-5$; в); $\frac{1}{(4x-6)^2+4}$; $\frac{4}{x^2+4}-6$; г) $e^{5\cos 3x}$; $\cos 3e^{5x}$; д) $\sin 2(x-4)$; $\sin 2x-4$.

Глава 3

1. а) так; б) так; в) ні; г) так; д) так; е) ні; ж) так; з) ні. **2.** а) $A\wedge B$; б) $\sim C\leftrightarrow\sim A$; в) $C\wedge\sim A\wedge\sim B$; г) $A\leftrightarrow(B\wedge C)$. **3.** а) $\sim B$; б) $A\to\sim C$; в) $(\sim A\wedge B)\to C$; г) $(\sim A\wedge\sim C)\to\sim B$; д) $C\leftrightarrow(B\wedge\sim A)$. **4.** а) $\sim D\to\sim E$; б) $(A\wedge\sim B)\leftrightarrow\sim E$; в) $(\sim C\wedge\sim D)\to\sim E$; г) $B\wedge C\wedge E$; д) $E\leftrightarrow(B\wedge C\wedge D)$. **5.** а) «я працюю в солідній фірмі і одержую високу зарплату»; б) «якщо я одержую високу зарплату, це означає, що я працюю в солідній фірмі та займаю високу посаду»; в) «якщо я працюю в солідній фірмі та не отримую високої зарплати, то моя посада не висока»; г) «я працюю в солідній фірмі та займаю високу посаду, тому моя зарплата висока». **6.** а) «я люблю грати в комп’ютерні ігри, але в мене нема комп’ютера», б) «якщо в мене є час, то я граю в комп’ютерні ігри»; в) «в мене нема часу для комп’ютерних ігор, але я люблю в них грати, і комп’ютер в мене є»; г) «в мене є комп’ютер, але я не люблю гратися, і часу на це в мене нема». **8.** а) $A\to\big(B\leftrightarrow(C\wedge D\wedge E)\big)$; б) $A\leftrightarrow(B\vee C)$; $B\to D$; $C\leftrightarrow(D\wedge E\wedge F)$; $C\leftrightarrow A$; в) $A\vee B$; $A\to C$; $C\to(D\wedge\sim E)$; $E\leftrightarrow B$. **9.** а) 0; б) 1; в) 0; г) 1; д) 1. **10.** а) 11001010; б) 10101001; в) 01101010; г) 00111111; д) 01101010. **11.** а) «якщо фірма виплатить мені премію, то мені вдасться укласти вигідну угоду»; «якщо мені не вдасться укласти вигідну угоду, то фірма не виплатить мені премію»; «якщо фірма не виплатить мені премію, то мені не вдасться укласти вигідну угоду»; б) «якщо парубок повнолітній, то він отримав паспорт», «якщо парубок не отримав паспорт, то він не повнолітній», «якщо парубок не повнолітній, то він не отримав паспорт»; в) «якщо мені нема чого буде їсти, я не буду працювати», «якщо мені є чого поїсти, то я піду попрацюю»; г) «якщо мене відрахували з інституту, це означає, що я не здав сесію», «якщо я здам сесію, мене не відрахують з інституту», «якщо мене не відрахували з інституту, це означає, що я здав сесію»; д) «якщо в тебе є великі шанси зробити блискучу кар'єру, то ти маєш гарну освіту», «якщо ти не маєш гарної освіти, то в тебе нема шансів зробити блискучу кар'єру», «якщо в тебе нема великих шансів зробити блискучу кар'єру, то ти не маєш гарної освіти». **12.** а) так; б) так; в) так; г) так; д) ні. **16.** а) правило відділення; б) правило заперечення; в) правило ствердження-заперечення; г) правило заперечення-ствердження; д) правило силогізму; є) закон протиріччя; ж) правило контрапозиції; з) правило імпортації; і) правило вибору. **17.** а) ні; б) так; в) так; г) так; д) так; е) так; є) так; ж) так; з) так; и) так.

Глава 4

1. а) 0; б) 1; в) 0; г) 1. **2.** а) 1101; б) 11101101; в) 00010000; г) 01011111; д) 11010010; е) 10101001. **3.** а) 0; б) 1; в) 1; г) 1; д) 1; е) 0. **5.** а) 1100111011111111; б) 0001000100000000; в) 0000000001010101; г) 0000000000000000; д) 1100111111111111; е) 0100111111111111. **6.** f_1: $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$; $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$; f_2: $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$; $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$; f_3: $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$; $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$; f_4: $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee$

$x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3$; $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$; f_5: $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3$; $(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$; f_6: $\bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$; $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$; f_7: $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$; $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$. **7.** а) $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$; $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$ б) $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$; $\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$; в) $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$; $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$; г) $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$. **8.** x_1x_2; $x_1\bar{x}_2$; $\bar{x}_1x_2$; $\bar{x}_1\bar{x}_2$; $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2$. **9.** $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)$; $(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$; $x_1 \vee \bar{x}_2$; $(\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$; $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$. **10.** а) $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3$; б) $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$; в) $\vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3$; г) $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3$. **11.** а) 0; б) 1; в) $\bar{x}\bar{y} \vee y\bar{z} \vee \bar{x}yz$; г) y; д) $y \vee \bar{z} \vee y\bar{z}$; е) $xy \vee \bar{x}yz$; є) $\bar{x} \vee y$; ж) x. **12.** а) 1; б) $\bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee xyz$; в) $\bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$; г) $\bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$; д) $\bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$; е) $\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$; є) $\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$; ж) $\bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$. **13.** а) $x \vee y$; б) $(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$; в) $(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee y)$; г) $(\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee y)(x \vee z)(\bar{y} \vee z)$; д) $(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee z)$; е) $(x \vee \bar{y})(x \vee z)(y \vee z)$; є) $x \vee \bar{y}$; ж) $(\bar{x} \vee z)(y \vee z)$. **14.** а) $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \cdot x_1 \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$; б) $\overline{\bar{x}_2\bar{x}_3} \cdot \overline{(\bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)}$; в) $\overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)} \cdot \overline{(x_2 \vee x_3)} \cdot \overline{\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3}$; г) $\bar{x}_1x_2 \vee \overline{(\bar{x}_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)}$. **15.** а) $\overline{\overline{x\bar{y}} \cdot \overline{\overline{x\bar{z}}y}}$; $\Big(\Big(\big(x \mid (y \mid y)\big) \mid$;

$\big(x \mid (y \mid y)\big) \mid \Big(\big(x \mid (z \mid z)\big) \mid \big(x \mid (z \mid z)\big) \mid y\Big) \mid$

$\Big(\big(x \mid (z \mid z)\big) \mid \big(x \mid (z \mid z)\big) \mid y)\big)\Big) \mid$

$\Big(\Big(\big(x \mid (y \mid y)\big) \mid \big(x \mid (y \mid y)\big) \mid \Big(\big(x \mid (z \mid z)\big) \mid \big(x \mid (z \mid z)\big) \mid y\Big) \mid$
$\Big(\big(x \mid (z \mid z)\big) \mid \big(x \mid (z \mid z)\big) \mid y\Big)\Big)\Big)$; $xyz \oplus x \oplus y$; б) $\overline{\bar{y} \cdot \overline{xz} \cdot \overline{\bar{x}y}}$;
$\Big(\Big(\big((y \mid y) \mid (x \mid z)\big) \mid \big((y \mid y) \mid (x \mid z)\big)\Big) \mid$
$\Big(\big((x \mid x) \mid y\big) \mid \big((x \mid x) \mid y\big)\Big)$; $xyz \oplus xz \oplus y$; в) $\overline{xy \cdot \overline{\overline{xy\bar{z}}}}$;
$\big((x \mid y) \mid (x \mid y)\big) \mid \Big(\big((x \mid y) \mid (x \mid y)\big) \mid (z \mid z)\Big)$; $xyz \oplus 1$; г)
$\overline{\overline{x\overline{\overline{(y\bar{z})}}} \cdot xz}$; $\Big(\Big(\Big(x \mid \big(y \mid (z \mid z)\big)\Big) \mid \Big(x \mid \big(y \mid (z \mid z)\big)\Big) \mid$
$\big((x \mid z) \mid (x \mid z)\big)$; 1; д) $\overline{\bar{y} \cdot \overline{\bar{x} \cdot \overline{\overline{y\bar{z}}}}}$; $(y \mid y) \mid \Big((x \mid x) \mid \big(y \mid (z \mid$
$z)\big)\Big)$; $xy \oplus x \oplus 1$; е) $\overline{\overline{\bar{y}z} \cdot \overline{\bar{x}y} \cdot \overline{xz}}$;
$\Big(\Big(\big((y \mid y) \mid z\big) \mid \big((x \mid x) \mid y\big)\Big) \mid \Big(\big((y \mid y) \mid z\big) \mid \big((x \mid x) \mid y\big)\Big)\Big)$
$\mid (x \mid z)$; $xyz \oplus xy \oplus yz \oplus x \oplus y$; є) $\overline{\overline{\overline{\bar{x}y}z} \cdot \overline{x\bar{z}}}$;
$\Big(\big((x \mid x) \mid y\big) \mid z\Big) \mid \big(x \mid (z \mid z)\big)$; $xy \oplus xz \oplus x \oplus y \oplus 1$; ж)
$\overline{\overline{\bar{x}z} \cdot \overline{x\bar{y}z}}$; $\big((x \mid x) \mid z\big) \mid \Big(\big((x \mid z) \mid (x \mid z)\big) \mid (y \mid y)\Big)$; $xyz \oplus z$. **16.**
а) $x \vee \overline{y \vee \overline{\overline{(x \vee z)}}}$; $\Big(x \downarrow \big(y \downarrow (x \downarrow z)\big)\Big) \downarrow \Big(x \downarrow \big(y \downarrow (x \downarrow z)\big)\Big)$;
$\bar{x} \to \overline{\bar{y} \to \overline{\overline{(\bar{x} \to z)}}}$; б) $\overline{\bar{y} \vee \bar{z}} \vee \overline{x \vee \bar{y} \vee \bar{z}}$; $\Big(\big((y \downarrow y) \downarrow (z \downarrow z)\big) \downarrow$
$\Big(x \downarrow \Big(\Big(\big((y \downarrow y) \downarrow (z \downarrow z)\big) \downarrow \big((y \downarrow y) \downarrow (z \downarrow z)\big)\Big)\Big) \downarrow \Big(\big((y \downarrow y)$
$\downarrow (z \downarrow z)\big) \downarrow \Big(x \downarrow \Big(\Big(\big((y \downarrow y) \downarrow (z \downarrow z)\big) \downarrow \big((y \downarrow y) \downarrow$
$(z \downarrow z)\big)\Big)\Big)\Big)$; $(y \to \bar{z}) \to \overline{\big(\bar{x} \to (y \to \bar{z})\big)}$ в) $\overline{\bar{y} \vee \overline{\overline{(\bar{x} \vee \bar{z})}}} \vee \overline{\bar{x} \vee \bar{z}}$;
$\Big(\Big((y \downarrow y) \downarrow \big((x \downarrow x) \downarrow (z \downarrow z)\big)\Big) \downarrow \big((x \downarrow x) \downarrow (z \downarrow z)\big)\Big) \downarrow$
$\Big(\Big((y \downarrow y) \downarrow \big((x \downarrow x) \downarrow (z \downarrow z)\big)\Big) \downarrow \big((x \downarrow x) \downarrow (z \downarrow z)\big)\Big)$;

$\left(y \to \overline{(x \to \bar{z})}\right) \to \overline{(x \to \bar{z})}$; г) $\overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}} \vee \bar{x} \vee y$; $\Bigg(\Big(\big((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)\big) \downarrow \big((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)\big) \downarrow (z \downarrow z)\Big) \downarrow \Big(\big((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)\big) \downarrow \big((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)\big) \downarrow (z \downarrow z)\Big)\Big) \downarrow \Big(\big((x \downarrow x) \downarrow y\big) \downarrow \big((x \downarrow x) \downarrow y\big)\Big) \downarrow \Bigg(\Big(\big((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)\big) \downarrow \big((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)\big) \downarrow (z \downarrow z)\big)\Big(\big((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)\big) \downarrow \big((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)\big) \downarrow (z \downarrow z)\big)\Big) \downarrow \Big(\big((x \downarrow x) \downarrow y\big) \downarrow \big((x \downarrow x) \downarrow y\big)\Big)$;
$(x \to (y \to \bar{z})\big) \to (x \to y)$; д) $\bar{x} \vee \bar{y} \vee \overline{\bar{x} \vee y \vee \bar{z}}$; $\Bigg(\Big(\big((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)\big) \downarrow \big((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)\big) \downarrow \Big(\big((x \downarrow x) \downarrow (z \downarrow z)\big) \downarrow \big((x \downarrow x) \downarrow (z \downarrow z)\big)\Big) \downarrow y)\big) \downarrow \Bigg(\Big(\big((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)\big) \downarrow \Big(\big(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)\big) \downarrow \Big(\big((x \downarrow x) \downarrow (z \downarrow z)\big) \quad \downarrow \big((x \downarrow x) \downarrow (z \downarrow z)\big)\Big) \downarrow y)\big)$; $\big(x \to (z \to y)\big) \to (x \to \bar{y})$; е) $\overline{\bar{y} \vee \bar{z}} \vee \overline{x \vee \overline{(y \vee z)}}$; $\Big(\big((y \downarrow y) \downarrow (z \downarrow z)\big) \downarrow \big(x \downarrow (y \downarrow z)\big)\Big) \downarrow \Big(\big((y \downarrow y) \downarrow (z \downarrow z)\big) \downarrow \big(x \downarrow (y \downarrow z)\big)\Big)$; $(y \to \bar{z}) \to \overline{\big((\bar{y} \to z) \to x\big)}$; є) $\overline{\bar{x} \vee y} \vee \overline{\bar{y} \vee z} \vee \overline{\bar{z} \vee x}$; $\Big(\big((x \downarrow x) \downarrow y\big) \downarrow \big((y \downarrow y) \downarrow z\big) \downarrow \big((x \downarrow x) \downarrow y\big) \downarrow \big((y \downarrow y) \downarrow z\big)\Big) \downarrow \big(x \downarrow (z \downarrow z)\big)\Big) \downarrow \Big(\Big(\big((x \downarrow x) \downarrow y\big) \downarrow \ \big((y \downarrow y) \downarrow z\big) \downarrow \big((x \downarrow x) \downarrow y\big) \downarrow \big((y \downarrow y) \downarrow z\big)\Big) \downarrow \big(x \downarrow (z \downarrow z)\big)\Big)$; $(z \to x) \to \Big((x \to y) \to \overline{(y \to z)}\Big)$; ж) $\overline{\bar{y} \vee z} \vee x \vee \overline{x \vee \bar{z}}$; $\Big(\Big(\big((y \downarrow y) \downarrow \quad z) \downarrow x\big) \downarrow \Big(\big((y \downarrow y) \downarrow z\big) \downarrow x\Big) \downarrow \big(x \downarrow (z \downarrow z)\big)\Big) \downarrow \Big(\Big(\big((y \downarrow y) \downarrow \quad z) \downarrow x\big) \downarrow$

$\Big(\big(((y \downarrow y) \downarrow z) \downarrow x\big) \downarrow \big(x \downarrow (z \downarrow z)\big)\Big)$; $(y \to z) \to \big((z \to x) \to x\big)$. **18.** а) x_2; $\bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3$; $\bar{x}_2$; б) $\bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3$; x_1; $\bar{x}_1$; в) $x_3 \vee x_2 \bar{x}_3$; $\bar{x}_1 \bar{x}_3$; $\bar{x}_1 \bar{x}_2$; г) $x_2 \vee \bar{x}_2 x_3$; $\bar{x}_1 \bar{x}_3$; $\bar{x}_1 \bar{x}_2$; д) 0; x_3; x_2; е) $\bar{x}_2 x_3$; $x_1 x_3$; $\bar{x}_1 \vee x_1 x_2$; є) x_3; 0; x_1; ж) $\bar{x}_2 \vee x_3$; $\bar{x}_1 \bar{x}_3$; $x_1 \vee \bar{x}_2$; з) $x_2 \bar{x}_3$; $x_1 \vee x_3$; $\bar{x}_1 \vee x_2$; и) $\bar{x}_2 \bar{x}_3$; $x_1 \bar{x}_3$; $\bar{x}_1 \vee x_1 x_2$. **19.** а) $x_2 x_3$; $x_1 x_3$; $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$; 0; x_3; x_2; 1; б) $x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2$; $x_1 x_3$; $x_1 x_2$; 0; x_3; x_2; 1; в) $\bar{x}_2 \vee x_3$; $\bar{x}_1 x_3$; $x_1 x_2$; 0; $\bar{x}_3$; x_2; 1; г) $\bar{x}_2 \bar{x}_3$; $\bar{x}_1 \bar{x}_3$; $\bar{x}_1 \bar{x}_2$; 0; $\bar{x}_3$; $\bar{x}_2$; 1; д) x_2; $\bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3$; $\bar{x}_2$; 0; 1; 0; 0; е) $\bar{x}_2 \vee x_3$; $\bar{x}_1 \vee x_3$; $x_1 x_2$; 0; $\bar{x}_3$; x_2; 1; є) $x_2 \vee x_3$; $x_1 x_3$; $x_1 x_2$; 0; $\bar{x}_3$; $\bar{x}_2$; 1; ж) $\bar{x}_2 \bar{x}_3$; $x_1 \bar{x}_3$; $\bar{x}_1 \vee x_2$; 1; $\bar{x}_3$; $\bar{x}_2$; 1; з) $\bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3$; $\bar{x}_1$; 0; 0; 1; 0; 0; и) $x_2 \vee \bar{x}_2 x_3$; $x_1 \bar{x}_3$; $x_1 \bar{x}_2$; 0; $\bar{x}_3$; $\bar{x}_2$; 1. **21.** а) $p' \cdot q + r$; б) $(p' \cdot r) \cdot (q' + r)'$; в) $\big((q' + r) + p\big)' \cdot q'$; г) $(p \cdot q' \cdot r')' + ((p + q')' + q + r)$; д) $(p' + q) \cdot r \cdot p' + q \cdot r'$; е) $(p' \cdot q + p \cdot r' + r) \cdot (p' \cdot q + q \cdot r')'$; є) $\Big(\big((p + q) \cdot q' \cdot (p + r) + q\big) + (p + q)'\Big)'$; ж) $(p \cdot q \cdot r + q)' \cdot p' + p' + r'$; з) $(p + q' + r) \cdot (p' + q + r') + (p + q' + r)'$; и) $(r + q')' \cdot (q + r') + p \cdot r'$. **22.** а) $r \vee q\bar{r}$; б) $p \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}$; в) $qr \vee \bar{q}\bar{r} \vee p\bar{q}r$; г) $pr \vee \bar{p}\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r$; д) $prs \vee p\bar{r}\bar{s} \vee \bar{p}qrs \vee \bar{p}\bar{q}s$; е) $qr\bar{s} \vee p\bar{r} \vee \bar{p}\bar{r}s$; є) $r\bar{s} \vee \bar{r}s$; ж) $\bar{r}s \vee \bar{p}qrs \vee p\bar{q}rs$. **23.** а) $q \vee p\bar{q}\bar{r}$; б) $qr \vee \bar{p}\bar{r} \vee pq\bar{r}$; в) $qr \vee \bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r$; г) $p \vee \bar{p}qr$; д) $pr \vee \bar{p}r\bar{s}$; е) $p\bar{r}s \vee \bar{p}$; є) $qrs \vee \bar{s}$; ж) $p\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{s} \vee \bar{p}\bar{r}s$. **24.** а) $q \vee p\bar{q} \vee \bar{p}\bar{q}r$; б) 0; в) $p\bar{q}\bar{r}$; г) $q \vee p\bar{q} \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}$; д) $\bar{p} \vee pq\bar{r}$; е) 1; є) 1; ж) $\bar{q} \vee q\bar{r}$.

Глава 5

1. а) $S(a,b,c) \leftrightarrow S(b,a,c)$; б) $\Pi(a,b,c) \leftrightarrow \Pi(b,a,c)$; в) $S(a,b,m), S(b,c,n)$: $S(m,c,d) \leftrightarrow S(a,n,d)$; г) $\Pi(a,b,m)$, $\Pi(b,c,n)$: $\Pi(m,c,d) \leftrightarrow \Pi(a,n,d)$; д) $S(a,b,m)$, $\Pi(a,c,n)$, $\Pi(b,c,k)$: $\Pi(m,c,d) \leftrightarrow S(n,k,d)$; е) $E(a,b) \leftrightarrow E(b,a)$. **2.** а)

$\forall x P(x)$; б) $\exists x P(x)$; в) $\forall x \exists y P(x, y)$; г) $\forall x \forall y \forall z P(x, y, z)$; д) $\forall x \forall y \forall z \forall t P(x, y, z, t)$; е) $\forall x P(x)$. **3.** $\forall x P(x, y)$ – «будь-яка книга x з бібліотеки y»; $\exists x P(x, y)$ – «існує книга x, яка належить бібліотеці y»; $\forall y P(x, y)$ – «книга x є в будь-якій бібліотеці y»; $\exists y P(x, y)$ – «існує така бібліотека y, в якій є книга x»; $\forall x \forall y P(x, y)$ - «будь-яка книга x є в будь-якій бібліотеці y»; $\forall x \exists y P(x, y)$ - «існує така бібліотека y, в якій є будь-яка книга x»; $\exists x \forall y P(x, y)$ - «існує така книга x, яка є в будь-якій бібліотеці y»; $\exists x \exists y P(x, y)$ - «існує така книга x, яка є в саме цій бібліотеці y». **4.** а) «існує такий доданок y, що для будь-якого x їх сума дорівнює z»; б) «існує такий множник y, що для будь-якого x їх добуток дорівнює z»; в) «для будь-яких доданка x та суми z, існує такий доданок y, що справедлива рівність»; г) «для будь-яких множника x та добутку z, існує такий множник y, що справедлива рівність». **5.** а) так, x, u, z - зв'язні, - y, v вільні; б) так, y - зв'язні, - x, z вільні; в) ні; г) так, $x, u,$ - зв'язні, - y, z вільні; д) ні; е) ні; є) так, всі зв'язні. **6.** а**)** ні, так, ні, так, ні, так, ні, так, ні, так, ні, ні, ні, ні; б) ні, ні, ні, ні, ні, так, ні, так, ні, так, так, ні, ні, так; в) ні, так, ні, так, так, так, ні, ні, ні, так, ні, так, так, ні; г) ні, так, ні, так, ні, так, ні, так, ні, так, так, так, так, так. **8.** а) здійснена; б) здійснена; в) здійснена; г) ТІ; д) ТІ; е) ТІ; є) здійснена; ж) здійснена. **9.** а) ТІ; б) здійснена; в) здійснена; г) ТП; д) ТІ; е) здійснена; є) ТП. **10.** а) здійснена, здійснена, здійснена, здійснена, здійснена, здійснена; б) здійснена, здійснена, ТІ, не здійснена, здійснена, ТІ; в) здійснена, здійснена, здійснена, здійснена, здійснена, здійснена; г) здійснена, здійснена, ТІ, здійснена, ТІ, ТІ; д) здійснена, здійснена, ТІ, здійснена, ТІ, здійснена; е) не здійснена, не здійснена, ТІ, здійснена, ТІ, здійснена. **11.** а) $\{2; 4; 6\}$; б) $\{2; 3; 4; 5; 6\}$; в) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; г) $\{2; 3; 4; 5; 6\}$; д) $\{1; 3; 5\}$; е) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; є) $\{2; 4; 6\}$; ж) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; з)

$\{1;2;3;4;5;6\}$; и) $\{2;4\}$. **14.** а) ні; б) ні; в) так; г) ні; д) ні; е) так; є) ні; ж) ні; з) ні; и) так. **15.** а) $\forall x\big(P_1(x)\vee P_2(y)\big)$; б) $\exists y\Big(\big(P_1(x)\wedge \bar{P}_2(y)\big)\vee\big(\bar{P}_1(x)\wedge P_2(y)\big)\Big)$; в) $\forall x\exists z\Big(\big(P_1(x)\vee P_2(y)\big)\wedge\big(\bar{P}_1(z)\vee \bar{P}_2(y)\big)\Big)$; г) $\exists x\big(P_1(x)\vee P_2(y)\big)$; д) $\forall y\big(\bar{P}_1(x)\vee \bar{P}_2(y)\big)$;е) $\exists x\exists y\big(P_1(x)\wedge P_2(y)\big)$. **16.** а) $\exists x\exists y\forall z\big(\bar{P}_1(x,y)\vee P_2(z,y)\big)$; б) $\forall x\exists y\exists z\big(\bar{P}_1(x)\vee P_2(z,y)\big)$; в) $\forall x\exists y\forall z\big(\bar{P}_1(y)\vee \bar{P}_2(x,z)\big)$; г) $\exists x\exists y\forall z\forall u\Big(\big(\bar{P}_1(x)\vee P_2(z,y)\big)\wedge\big(P_1(z)\vee \bar{P}_2(x,u)\big)\Big)$; д) $\forall x\exists y\forall z\big(\bar{P}_1(x,y)\vee P_2(z,y)\big)$; е) $\forall x\forall y\exists z\exists u\forall v\exists w\forall p\exists t\bigg(\Big(\big(\bar{P}_1(t)\wedge P_2(x,u)\big)\vee \bar{P}_3(x,y,z)\Big)\wedge\big(P_1(x)\big)\vee P_2(x,y,w)\vee P_3(v,w,p)\bigg)$. **17.** а) $\exists x\exists y\exists z\forall u\big(\bar{P}_1(x,y)\vee \bar{P}_2(x)\vee P_3(u,z)\big)$; б) $\forall x\forall y\exists z\Big(\big(\bar{P}_1(y)\wedge P_2(x,y)\big)\vee \bar{P}_3(z)\Big)$; в) $\exists x\exists y\exists z\exists u\forall v\Big(\big(\bar{P}_1(x,y,z)\wedge \bar{P}_2(u)\big)\vee \bar{P}_3(y,v)\Big)$; г) $\forall x\forall y\forall z\ \big(\bar{P}_1(x,y,z)\wedge \bar{P}_2(x,z)\wedge P_3(y,z)\big)$; д) $\exists x\forall y\exists z\forall u\forall v\big(P_1(u)\vee \bar{P}_2(x,y)\vee \bar{P}_3(x,y,v)\big)$; е) $\exists x\forall y\exists z\forall u\forall v\exists w\Big(\big(\bar{P}_1(x,y,z)\wedge P_2(u)\big)\vee \bar{P}_3(x,y)\Big)$.

Глава 6

1. 4,4,4,4,4; 2,4,2,3,3; 3,4,3,4,4; 4,4,4,4,4; 4,4,4,4,6; 0,0,0,0,0; 1,1,4,1,1; 3,3,0,3,3; 3,4,2,4,3; 2,0,2,1,1; (2,0), (3,1), (0,2), (2,1), (0,3); (2,0), (3,1), (0,2), (1,2), (1,2); (2,1), (0,4), (3,0), (3,1), (1,3);(2,1), (0,4), (3,0), (2,2), (2,2). **3.** G_1-G_6, G_2-G_7, G_3-G_5, G_4-G_{10}, G_8-G_9, $G_{11}-G_{12}$, $G_{13}-G_{14}$.
4. а)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

e	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
a	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
b	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0
c	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
e	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
f	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
g	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
h	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
i	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
j	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0

ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
вершина	п	*a*	*a*	*b*	*b*	*c*	*d*	*e*	*e*	*f*	*e*	*f*	*g*	*g*	*h*	*i*
	к	*e*	*b*	*c*	*c*	*d*	*f*	*f*	*g*	*h*	*h*	*g*	*h*	*i*	*j*	*j*

б)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
b	1	2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	1	2	1	0	1	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
e	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
h	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*
a	0	1	0	0	0	0	0	1	0
b	1	2	1	0	1	0	0	0	0
c	0	1	2	1	1	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0	0	0	0	1
e	0	1	1	0	0	1	1	0	0
f	0	0	0	0	1	0	1	0	0
g	0	0	0	0	1	1	0	0	0
h	1	0	0	0	0	0	0	0	1
i	0	0	0	1	0	0	0	1	0

ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
вершина	п	*a*	*b*	*b*	*c*	*c*	*b*	*c*	*a*	*e*	*e*	*d*	*f*	*h*
	к	*b*	*b*	*c*	*c*	*d*	*e*	*e*	*h*	*f*	*g*	*i*	*g*	*i*

в)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
a	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1
k	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*
a	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0
c	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	0
e	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
f	0	2	0	0	1	0	1	0	0	1	1
g	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
h	0	0	0	2	0	0	1	0	0	1	1
i	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
j	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1
k	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0

ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
вершина	п	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*b*	*c*	*d*	*d*	*e*	*f*	*g*	*e*	*f*	*f*	*h*	*h*	*i*	*j*
	к	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*f*	*g*	*h*	*h*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*j*	*k*	*j*	*k*

г)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
c	0	2	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
e	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1

f	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
a	0	1	1	1	0	0	0
b	1	0	1	0	1	0	0
c	1	1	2	1	1	1	0
d	1	0	1	0	1	0	0
e	0	1	1	1	0	0	0
f	0	0	1	0	0	0	3
g	0	0	0	0	0	3	0

ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
вершина	п	*a*	*c*	*a*	*a*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*f*	*f*	*f*	*c*
	к	*b*	*c*	*d*	*c*	*c*	*e*	*d*	*e*	*f*	*g*	*g*	*g*	*f*

д)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
k	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
l	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
n	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
o	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*
a	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
c	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
e	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
i	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
j	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0

k	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
l	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
m	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
n	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
o	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
вершина	п	*a*	*a*	*a*	*b*	*d*	*c*	*b*	*d*	*f*	*h*	*g*	*i*	*h*	*j*	*k*	*n*	*o*	*l*
	к	*b*	*e*	*b*	*c*	*e*	*f*	*i*	*i*	*g*	*i*	*j*	*j*	*m*	*k*	*n*	*o*	*l*	*m*

е)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
k	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
вершина	п	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*h*	*h*
	к	*a*	*b*	*d*	*c*	*c*	*d*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
a	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0
b	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
c	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
d	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
e	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
f	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
g	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
h	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
i	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
j	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
k	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

5. а)

	1	2	3	4	5	6
a	1	0	0	1	0	0
b	-1	-1	0	0	0	1
c	0	1	1	0	0	0
d	0	0	-1	0	0	0
e	0	0	0	0	-1	-1
f	0	0	0	-1	1	0

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
a	0	1	0	0	0	1
b	1	0	1	0	1	0
c	0	1	0	1	0	0
d	0	0	1	0	0	0
e	0	1	0	0	0	1
f	1	0	0	0	1	0

ребро		1	2	3	4	5	6
вершина	п	*b*	*b*	*d*	*f*	*e*	*e*
	к	*a*	*c*	*c*	*a*	*f*	*b*

б)

	1	2	3	4	5	6	7
a	1	-1	1	0	0	0	0
b	-1	0	0	-1	0	0	0
c	0	1	0	1	-1	1	0
d	0	0	-1	0	1	0	0
e	0	1	0	0	0	-1	2

	a	*b*	*c*	*d*	*e*
a	0	1	1	1	0
b	1	0	1	1	0
c	1	1	0	1	1
d	1	1	1	0	0
e	0	0	1	0	2

ребро		1	2	3	4	5	6	7
вершина	п	*b*	*a*	*d*	*b*	*c*	*e*	*e*
	к	*a*	*e*	*a*	*c*	*d*	*c*	*e*

в)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
b	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	-1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1	-1	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e	0	-1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	1	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	1	0
j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	-1
k	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	1

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*
a	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
b	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
d	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
e	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

f	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
g	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
h	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
i	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
j	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
k	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0

ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
вершина	п	*b*	*e*	*c*	*c*	*e*	*d*	*a*	*d*	*f*	*j*	*h*	*i*	*k*	*i*	*j*	*k*	*j*
	к	*a*	*b*	*e*	*c*	*d*	*a*	*f*	*g*	*g*	*a*	*f*	*g*	*d*	*h*	*h*	*i*	*k*

г)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
c	0	1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	1	-1	0	0	0	0	0
e	0	0	0	-1	-1	0	-1	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
a	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
b	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
c	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
e	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0
f	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
g	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
j	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
вершина	п	*a*	*a*	*c*	*c*	*e*	*d*	*e*	*g*	*b*	*h*	*j*
	к	*b*	*c*	*d*	*e*	*d*	*f*	*g*	*f*	*i*	*i*	*i*

д)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	-1	-1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

d	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	-1	-1	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	1	0	0	-1	-1	0	0	0	-1	-1	0	1	1	0	0
j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
k	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
l	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
n	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0
o	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1
q	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
r	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*	*q*	*r*
a	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	1	1	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	2	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
j	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
k	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
l	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
n	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
o	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
q	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
r	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
вершина	п	*c*	*c*	*e*	*e*	*d*	*e*	*i*	*i*	*e*	*f*	*j*	*i*	*i*	*k*	*n*	*o*	*n*	*o*
	к	*a*	*b*	*c*	*i*	*g*	*d*	*c*	*c*	*f*	*h*	*l*	*j*	*k*	*m*	*i*	*i*	*q*	*r*

е)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	-1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	-1	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	-1	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	0
j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
k	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
l	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*
a	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
c	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
d	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	1	3	0	0	0	1	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
i	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
j	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
k	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
l	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
вершина	п	*a*	*a*	*c*	*d*	*e*	*c*	*g*	*f*	*g*	*g*	*g*	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*	*l*
	к	*d*	*b*	*b*	*c*	*b*	*e*	*e*	*g*	*f*	*f*	*j*	*h*	*j*	*j*	*k*	*l*	*k*

10. а) 3; б) 2; в) 3; г) 2. **11.** а) $v_2, v_6, (v_2v_7), (v_4v_6), (v_5v_6)$; б) $v_2, v_4, v_5, v_6, (v_2v_4), (v_4v_6), (v_5v_6), (v_5v_7)$; в) $v_2, v_3, v_4, v_6, (v_2v_4), (v_4v_6), (v_5v_6), (v_3v_7)$; г) $v_1, v_2, v_4, v_6, (v_1v_2), (v_1v_3), (v_2v_4), (v_4v_6), (v_5v_6), (v_6v_7)$. **12.** а) 1,1,1,1,2,2; б) 1,2,2,3,3,3; в) 2,2,3,1,1,1; г) 1,1,1,1,1,2. **13.** а) {2,4}, {1,3,5,6,7,8,9,10}, 2, 3; б) {7}, {2,3,10,11}, 3, 6; в) {1,4,5}, {7,8,10,11,12}, 3, 5; г) {10}, {2,3,6}, 3, 6. **14.** е, ж. **15.** г, е, ж. **18.** а) *dadcegfd*; б) *abcdghieda*; в) *abcdefgha*; г) не існує; д) не існує; е) *abcfeda*. **19.** а) *gacefhbd*; б) *abchde*; в) *abcdef*. **20.** а) ні; б) так; в) так; г) так; д) так; е) ні; є) ні; ж) так; з) так. **23.** а) так; б) ні; в) так; г) ні; д) ні; е) так; є) так; ж) так; з) ні; и) ні.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Акимов О.Е. Дискретная математика. Логика, группы, графы. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003. – 376 с.
2. Андерсон, Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика. – Москва – С.- Петербург – Киев : Издательский дом “Вильямс”, 2003.– 958 с.
3. Бондаренко М.Ф. Комп’ютерна дискретна математика. / М. Ф. Бондаренко, Н. В. Білоус, А. Г. Руткас.– Харків: «Компанія СМІТ», 2004. – 480 с.
4. Донской В.И. Дискретная математика. - Симферополь: Сонат, 2000– 360с.
5. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А. Основи дискретної математики. – К.:Наукова думка, 2002. – 578 с.
6. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. - М.: Энергия, 1980. – 344 с.
7. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. - М.: Наука, 1976. – 320 с.
8. Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях. - М.: Логос, 2002. – 238 с.
9. Тевяшев А.В., Гусарова И.Г. Основы дискретной математики в примерах и задачах. - Харьков: ХНУРЭ, 2003. – 272 с.
10. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. - М.: Наука, 1979. - 384 с.
11. Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977. - 205 с.
12. Коваленко Л.Б. Дискретна математика : навч. посібник / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків: ХНАМГ, 2006. -192 с.
13. Елементи дискретної математики. / А. І. Колосов, Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський, А. В. Якунін; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. - Харків: ХНАМГ, 2008. -132 с.
14. Методичні вказівки з дискретної математики. / Харків. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад. : А. І. Колосов, Л. Б. Коваленко,

С. О. Станішевський., А. В. Якунін. – Харків: ХНАМГ, 2009, -123 с.

15. Методичні вказівки з дисципліни «Вища математика 2» до практичних занять, самостійної та контрольної роботи. / Харків. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад. : А. І. Колосов, Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський., Г. А. Кузнецова. - Харків: ХНАМГ, 2011. -66 с.
16. Збірник завдань для самостійних та контрольних робіт з дискретної математики. Харків. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад. : Л. Б. Коваленко, Ю. В. Ситникова. - Харків: ХНАМГ, 2011. - 85 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Навчальне видання

КОВАЛЕНКО Людмила Борисівна

СТАНІШЕВСЬКИЙ Степан Олександрович

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА ДЛЯ МЕНЕДЖЕРІВ

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск *А.І. Колосов*

За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *Л. Б. Коваленко*

Підп. до друку 25.06.15 Формат 60 х 84/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 14,0
Зам. № Тираж 300 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014 р.